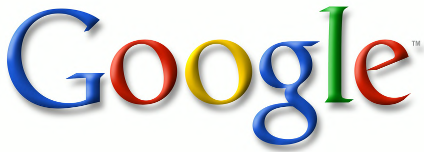
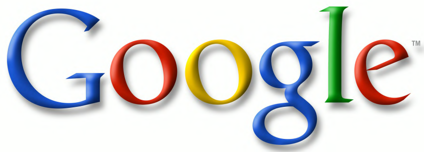




Grundriss

der

Festigkeitslehre.

Zum Gebrauch an Handwerkerschulen,
insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen
sowie
zum Selbstunterricht
bearbeitet
von

Dr. E. Glinzer,
Lehrer der Allgemeinen Gewerbeschule und der Schule für Bauhandwerker
in Hamburg.

Mit 91 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln, sowie mit zahlreichen Uebungsbeispielen und Aufgaben.



Dresden.
Verlag von Gerhard Kühtmann.
1890.

Vorwort.

Bei dem Unterricht in der Festigkeitslehre, wie ich ihn seit einer Reihe von Jahren in der Schule für Bauhandwerker ertheile, habe ich mehr und mehr das Bedürfniss nach einem für die Hand des Schülers geeigneten Leitfaden empfunden. Das ohne einen solchen kaum zu umgehende Diktiren und Eintragen, was übrigens für die Einprägung seinen grossen Werth hat, verkürzt doch allzusehr die Zeit, welche bei drei wöchentlichen Stunden der fünf Wintermonate für die erforderliche Uebung in den Anwendungen der Festigkeitslehre ohnehin knapp bemessen ist; auch erlaubt ein mit Aufgaben versehenes Buch dem strebsamen und begabteren Schüler, selbst rascher vorwärts zu kommen.

Die für die Zwecke technischer Schulen herausgegebenen elementaren Festigkeitslehren sind nun, so weit sie mir bekannt geworden entweder in ihren Voraussetzungen für Handwerkerschulen zu weitgehend, oder aber reine Anweisungen für den Schüler, wie er im einzelnen Falle zu rechnen hat, ohne auf den Grund der Sache einzugehen. Erstere verbieten sich deshalb von vornherein und auch wegen ihres reichlichen Umfangs als ungeeignet. Betreffs der letzteren aber halte ich es, ohne deren Brauchbarkeit in gewisser Richtung verkennen zu wollen, wie überhaupt beim Unterricht in den Fächern der angewandten Mathematik, so auch in der Festigkeitslehre für nothwendig, so viel als möglich streng zu verfahren und dem Schüler, soweit seine Kenntnisse dafür reichen, einen Einblick in die Begründung der Regeln, nach denen er verfahren soll, zu verschaffen. Hierzu kommt, dass manche sonst treffliche Bücher eine klare Auseinandersetzung des Zusammenhangs von Elasticität und Festigkeit vermissen lassen.

Aus diesen Gründen und, da sich in dem langjährigen Unterricht manches demselben Eigenthümliche herausgebildet hatte, habe ich es für angezeigt gehalten, Lehrgang und Beispielsammlung im Druck niederzulegen und, in der Annahme, damit einem auch an

anderen derartigen Schulen empfundenen Bedürfniss entgegen zu kommen, hiermit zu veröffentlichen. Das vorliegende Buch will eine zunächst für diesen Zweck geschriebene Darstelluug der Festigkeitslehre geben und deren mannigfache Anwendungen an zahlreichen praktischen Beispielen erörtern. Vorausgesetzt ist dabei die Bekanntschaft mit der Algebra bis zu den Gleichungen des zweiten Grades und mit den ersten Theilen der Trigonometrie, wie solches nach dem Lehrplan unserer Bauschule von den Schülern der ersten Klasse erreicht wird. Die damit ausgeschlossenen Kapitel der elastischen Linie, der kontinuirlichen Träger, die schwierigen Theile der zusammengesetzten Festigkeit etc. sind ohnehin für die gewöhnlichen Bedürfnisse des Bauhandwerkers zu entbehren. Für Schüler, welche nachher eine weitere Ausbildung suchen, wird es aber gerade von grosser Wichtigkeit sein, wenn die Grundlage sicher gelegt ist.

Die Einfügung von Aufgaben, welche in das Gebiet des Maschinenbaues einschlagen, ist in der Absicht geschehen, das Buch auch für die Zwecke des ersten Unterrichts in Maschinenbau- und Mechanikerschulen geeignet zu machen. Es wird die Schüler meiner Ansicht nach befähigen, die Entwickelung der beim Konstruiren nöthig werdenden weiteren Formeln zu verstehen.

Ebenso wird der Bauschüler, welcher sich den Inhalt des Buches gründlich zu eigen gemacht hat, leicht im Stande sein, wie es bei uns in der Prüfungsklasse geschieht, einfache Konstruktionen des Hochbaues im ganzen auf ihre Festigkeit zu berechnen. Hierzu geeignete Aufgaben wurden dem Buche nicht beigefügt, theils um dasselbe nicht über den zunächst erforderlichen Umfang hinaus zu vergrössern, theils weil sich solche in manchen anderen Büchern, u. a. bei Müller, Handbuch der Festigkeitslehre, Jentzen, Baumechanik, ausgeführt finden.

Den möglichst instruktiv gewählten Aufgaben sind meistens die Antworten beigefügt, vielfach zugleich mit der Anleitung, auch wo es nützlich schien, mit der ausführlichen Lösung. Wenn solches für die niederen Klassen der Schule nicht gerathen erscheinen würde, kann es unbedenklich in der ersten Klasse geschehen und wird hier den strebsamen Schüler bedeutend fördern. Für den Selbstunterricht ist es geradezu erforderlich.

Bei Berechnung der grössten Biegungsmomente belasteter Träger sind die Lösungen von Aufgaben eingefügt, welche der in der Hand der Schüler befindlichen Graphischen Statik von Schlotke entnommen sind; es soll dadurch dem Schüler Gelegenheit gegeben sein zur Vergleichung der durch Zeichnung gewonnenen Resultate mit

der Rechnung. — Hinweise auf Geometriebücher beziehen sich auf des Verfassers Elementargeometrie, deren drei Theile im gleichen Verlage herausgekommen sind.

Bei Abkürzung der Decimalbrüche ist stets so verfahren, dass ein gefragter Querschnitt niemals zu klein, eine gefragte Belastung niemals zu gross erhalten wird. Ausserdem aber sind die Resultate meist abgerundet (∾) gegeben, wie es die Praxis verlangt.

Wurzelwerthe sind aus den Tafeln entnommen. Da der Schüler später in der Praxis die sich in jedem Bau- etc. Kalender findenden arithmetischen Tafeln hierzu benutzen wird, ist er schon jetzt mit dem Gebrauch bekannt zu machen, wobei allerdings die bereits erlangte Bekanntschaft mit dem Wurzelausziehen vorausgesetzt ist. Wirklichen Nutzen in dieser Hinsicht gewährt aber nur eine ausführliche derartige Zusammenstellung, wie diejenige der Schlömilch'schen Tafeln z. B. nicht ist. Aus diesem Grunde ist am Schluss des Buches eine solche angehängt. In demselben Sinne sind auch Abkürzungsrechnungen, Näherungswerthe etc. an geeigneter Stelle eingefügt. Die Benennungen betreffend, ist im allgemeinen neben Tonne (t = 1000 kg) und Kilogramm (kg) das Centimeter (cm) zu Grunde gelegt; die für Maschinenbau bestimmten Aufgaben sind dagegen für Millimeter (mm) gerechnet.

Meinen verehrten Kollegen, den Herren Ingenieur Prohmann, J. Schlotke und Baumeister Thiele sage ich auch hier meinen Dank für die schätzenswerthen Winke, welche Dieselben mir bei Abfassung des Buches haben zu Theil werden lassen.

Die Herren Fachgenossen von den Baugewerk-, Maschinenbau- und Mechanikerschulen bitte ich, das Buch einer wohlwollenden Prüfung zu unterwerfen und mir eventuell ihre Wünsche und Aussetzungen gütigst mittheilen zu wollen.

Hamburg, November 1889.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichniss.



Einleitung.

1. Festigkeit ist der Widerstand, welchen das Material den von aussen wirkenden formverändernden Kräften entgegensetzt.

Dieser Widerstand entspringt aus der Kohäsion, welche zwischen den kleinsten Theilchen (Molekülen) des Körpers wirkend, dieselben in ihrer Lage, wie sie einmal ist, zu erhalten sucht, einer jeden Veränderung dieser Lage entgegenwirkt.

Hier ist also gar nicht die Rede von den stoffverändernden, den chemisch wirksamen Kräften, denen das Material ebenfalls ausgesetzt ist, wie Einfluss der Luft, des Wassers, welche zum Beispiel das Rosten des Eisens, Faulen des Holzes etc. zu Wege bringen, sondern von den Kräften, welche den Zustand des Materials und zwar die Lage der kleinsten Theilchen ändern.

Die Beanspruchungen des Materials gehen im allgemeinen aus der Anziehungskraft der Erde hervor: das Gewicht der Mauern, Balkenlagen mit Nutzlast, der Bedachung etc. bringt in Stützen, Pfeilern, Säulen, Zugstangen, auch wo solche nicht lothrecht sind, Druck-, Zug- oder Schubspannungen hervor, welche stets mit kg als Kräfteeinheit gemessen werden.

Die Resultirende der äusseren Kräfte, welche auf den betreffenden Konstruktionstheil wirken, wird die Belastung genannt. Die Gesetze für die Berechnung derselben werden in der Statik gegeben und hier im wesentlichen als bekannt vorausgesetzt.

2. Elasticität und Elasticitätsgrenze. Jede, auch die kleinste Belastung eines Konstruktionstheils bringt eine Formveränderung hervor. Dabei nähern oder entfernen sich die Moleküle so lange, bis die hervorgerufenen inneren Gegenkräfte der äusseren Beanspruchung das Gleichgewicht halten. So lange die Veränderung verhältnissmässig noch gering ist, nimmt der Körper nach Beseitigung der Belastung seine ursprüngliche Form wieder an, indem die Moleküle in ihre ursprüngliche Lage zu einander zurückkehren. Diese Eigenschaft, Elasticität genannt, besitzen die verschiedenen Materialien in sehr verschiedenem Grade; keines aber ist vollkommen elastisch, da sich bekanntlich keines beliebig ausdehnen oder zusammendrücken lässt, ohne endlich die veränderte Form dauernd beizubehalten. Tritt letzteres, wenn auch nur in geringem Grade ein,

so hat das Stück schon an seinem inneren Zusammenhang gelitten. Die grösste Formveränderung, welche es unter Beibehaltung seiner vollen Zusammenhangskräfte erfahren kann, heisst seine Elasticitätsgrenze, und die Belastung, welche dahin führt, die Grenzbelastung. Die Grösse derselben richtet sich nach dem Stoff, sowie nach Grösse und Form des betreffenden Körpers.

Jeder Theil einer Konstruktion muss nun, wenn dieselbe ihren Zweck sicher und für die Dauer erfüllen soll, so eingerichtet sein, dass bei seiner Formveränderung die Elasticitätsgrenze noch bei weitem nicht erreicht wird.

Durch die unausbleiblichen Einflüsse der Erschütterungen, Stösse etc., wie auch der chemisch wirksamen Kräfte wird eine allmähliche Schwächung der Kohäsion herbeigeführt; deshalb muss die Beanspruchung noch weit unter der Grenze bleiben.

Nach Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze noch immer weiter beansprucht, nimmt der Körper immer stärkere dauernde Formveränderung an, bis endlich die Moleküle sich an einer Stelle trennen und die Zerstörung eintritt. Erst dann ist der Widerstand: die Festigkeit des Körpers ganz gebrochen.

Die Dehnbarkeit d. i. die Eigenschaft, über die Elasticitätsgrenze hinaus bis zum Eintritt des Bruchs noch starke Formänderungen zu erfahren, ist besonders bei den Metallen sehr gross. Auf Festigkeit und Dehnbarkeit haben Temperaturänderungen mehr oder weniger Einfluss.

3. Arten von Festigkeit und Elasticität. Je nach der Art der Beanspruchung des Materials unterscheidet man nun folgende Arten von Festigkeit:

I. Der Widerstand gegen einen Zug in der Längsrichtung heisst die **Zug-** oder **Zerreissungsfestigkeit** (auch absolute F.).

II. Der Widerstand gegen einen Druck in der Längsrichtung, wobei seitliche Ausbiegung des Körpers ausgeschlossen ist, heisst die **Druck-** oder **Zerdrückungsfestigkeit.**

III. Der Widerstand gegen eine in derjenigen Querschnittsebene wirkende Kraft, in welcher die Trennung der Moleküle erfolgen soll, heisst die **Schub-** oder **Abscheerungsfestigkeit.**

IV. Der Widerstand gegen ein Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabachse geht und dadurch auf Biegung wirkt, heisst die **Biegungs-** oder **relative Festigkeit.**

V. Der Widerstand gegen ein in der Querschnittsebene auf Drehung wirkendes Kräftepaar heisst die **Drehungs-** oder **Torsionsfestigkeit.**

VI. Der Widerstand gegen einen Druck in der Längsrichtung bei seitlicher Ausbiegung heisst die **Zerknickungsfestigkeit.**

Hierbei sind die Konstruktionstheile im allgemeinen als prismatisch (Stäbe, Stangen, Schienen, Wellen; Säulen, Pfeiler, Mauern, Platten; Ständer, Pfosten, Sparren, Riegel etc. etc.) vorausgesetzt. Achse ist die durch die Schwerpunkte aller Querschnitte gehende Gerade, ihre Richtung ist die Längsrichtung. Faser ist ein in der Längsrichtung liegender unendlich dünner prismatischer Streifen. Scheibe ein von zwei unendlich nahe liegenden Querschnitten begrenztes Stück des Körpers. Eine Achsialkraft wirkt in der Achsenrichtuug, eine Transversalkraft oder Querkraft senkrecht zu derselben. Eine Zugkraft wird gewöhnlich als positive, eine Druckkraft als negative Spannung aufgefasst.

Ueberall wird homogenes, d. i. an allen Stellen gleichgeartetes Material vorausgesetzt.

Gieb für jeden der sechs Fälle bestimmte Konstruktionstheile an, welche die betreffende Festigkeit zu leisten haben!

4. Aufgaben der Festigkeitslehre. Die Festigkeitslehre hat, je nach der Belastungsart,

a) für einen gegebenen Konstruktionstheil die zulässige Beanspruchung,

b) für eine gegebene Beanspruchung die nöthigen Ausmessungen des Konstruktionstheils,

c) für einen gegebenen Konstruktionstheil bei gegebener Beanspruchung die hervorgebrachte Formveränderung zu ermitteln.

5. Elasticitätsmodul. Das höchst wichtige Maass für die Grösse der Formänderung ist der Elasticitätsmodul.

Derselbe, für Zug und Druck mit E bezeichnet, bedeutet die Anzahl kg, durch welche ein Stab von 1 qcm Querschnitt um seine ganze eigene Länge verlängert bezw. verkürzt werden würde, falls das Material des Stabes vollkommen elastisch (siehe 2.) wäre. Für alle Veränderungen innerhalb der Elasticitätsgrenze ist dieser Modul danach anwendbar.

Die Einführung desselben und die Ermittelung seines numerischen Werthes für die verschiedenen Materialien beruht auf dem durch die Beobachtung bestätigten Satz:

Die Formveränderung (Verlängerung bezw. Verkürzung) ist unter sonst gleichen Umständen proportional der wirkenden Kraft (Zug- bezw. Druckbelastung).

Das Verhältniss der Kraft zu der durch sie hervorgebrachten Aenderung (Verlängerung = Zuwachs im positiven Sinne, Verkürzung = Zuwachs im negativen Sinne) ist offenbar je nach Material, Länge und Querschnitt sehr verschieden. Für dasselbe Stück ist aber dieses Verhältniss ein konstantes. Für die Einheiten von Länge und Querschnitt durch Versuche festgestellt, ergiebt es den Werth des Elasticitätsmoduls E.

Brachte bei einem Stab von der Länge 1 m und dem Querschnitt 1 qcm die Kraft P kg die Verlängerung bezw. Verkürzung v m hervor, so ist

$$E = P : v.$$

Da v als das Verhältniss des Zuwachses zur Länge v m : 1 m (oder v cm : 1 cm u. s. f.) betrachtet werden kann und als solches ohne Benennung ist, so erhält E dieselbe Benennung wie P, also hier kg. Für den Querschnitt 1 qmm ist der Werth von E, wie leicht zu sehen, 100 mal so klein.

Beispiele. 1. Ein Silberdraht von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt wurde, in lothrechter Lage oben eingespannt und unten durch 4 kg beschwert, um 0,54 mm verlängert.

Dann ist die Verlängerung, in Bruchtheilen der Länge ausgedrückt, v = 0,00054. Folglich E = 4 : 0,00054 = 7407. Der Elasticitätsmodul des Silbers ist pro qmm = 7407 kg, also pro qcm = 740 700 kg.

2. Ein Schmiedeeisenstab von 1 qcm Querschnitt und 50 cm Länge erfuhr, vor Ausbiegung geschützt, durch einen Druck von 1010 kg die Verkürzung von 0,25 mm. Wie gross ist danach E für Schmiedeeisen?

Aufl. Für die Länge 1 m würde die Verkürzung 0,5 mm gewesen sein = 0,0005 m; das Verkürzungsverhältniss ist also = 0,0005 und

$$E = 1010 \text{ kg} : 0{,}0005 = 2\,020\,000 \text{ kg}.$$

3. Ein Holzstab von 2 qcm Querschnitt und 5 m Länge wurde durch einen Zug von 48 kg um 1 mm ausgedehnt.

Aufl. Für je 1 m ist der Zuwachs 0,2 mm = 0,0002 m. Bei 1 qcm würde die Verlängerung offenbar zweimal soviel betragen als bei 2 qcm Querschnitt, also 0,0004 m. Hiernach ist

$$E = 48 \text{ kg} : 0{,}0004 = 120\,000 \text{ kg}.$$

Ueber eine andere Bestimmungsweise von E siehe unter Biegungsfestigkeit.

Auf die oben zuerst gegebene Erklärung von E kommt man in folgender Weise:

Wenn bei einem Stab von der Länge 1 m die Kraft P kg die Aenderung v m hervorbringt, so müsste bei demselben Stab die Kraft E kg, welche eine Aenderung von 1 m (also um die ganze eigene Länge) bewirken würde, sich aus der Proportion ergeben:

$$E \text{ kg} : P \text{ kg} = 1 \text{ m} : v \text{ m},$$ woraus man wieder erhält

$$E \text{ kg} = P \text{ kg} : \left(\frac{v \text{ m}}{1 \text{ m}}\right).$$

In ähnlicher Weise bedeutet der

Elasticitätsmodul C für Schub

die Anzahl kg, durch welche der eine Theil des Körpers gegen den andern um die ganze Fläche, in welcher der Zusammenhang aufgehoben werden soll, verschoben werden würde, falls der Körper vollkommen elastisch wäre. Derselbe ist von demjenigen für Zug und Druck meist sehr verschieden.

6. Grenzmodul. Die Belastung, welche einen Stab von 1 qcm Querschnitt bis zur Elasticitätsgrenze verändert, heisst der Grenzmodul oder Tragmodul, mit e bezw. c bezeichnet. Sein Werth steht nach obigem zu E bezw. C in demselben Verhältniss, wie die bei der Elasticitätsgrenze beobachtete Formänderung zur ursprünglichen Länge des betreffenden Stabes.

Die Werthe von E, C, sowie von e, c sind in folgender Tafel zusammengestellt.

Tafel I. des Elasticitätsmoduls und des Grenzmoduls in kg für 1 qcm.

Material	Elasticitätsmodul E für Zug und Druck	Grenzmodul e für		Elasticitätsmodul C für Schub	Grenzmodul c für Schub
		Zug	Druck		
Gusseisen	1 000 000	750	1500		560
Schmiedeeisen in Stäben	2 000 000	1400	1400		1100
Eisenblech	1 800 000	1400	1400		1100
Eisendraht	2 200 000	2200—3000	—		—
Stahl	2 000 000	2000—3000	2000—3000	C =	2200
Gussstahl, gehärtet und angelassen	3 100 000	6500	—	(0,375 bis	4500
Kupfer, gehämmert	1 100 000	1400	—	0,4) E	1100
Kupferdraht	1 200 000	1200	—		—
Messing, gegossen	650 000	480	—		—
Messingdraht	1 000 000	1330	—		—
Blei	50 000	100	—		—
Eichenholz, Faserrichtung	120 000	220	180	7200	20
Fichtenholz, do.	120 000	230	190	6700	20
Kiefernholz, do.	130 000				
Buchenholz, do.	110 000	200	180	6200	20
Lederriemen	—	160	—	—	—
Granit	150 000 bis 500 000	—	—	—	—
Sandstein	100 000	—	—	—	—

Anmerkung. Während für fast alle anderen Materialien durch Versuche bewiesen ist, dass dasselbe Stück sowohl durch Zug wie durch Druck bei jedesmaliger Erreichung der Elasticitätsgrenze eine gleiche Längenänderung erfährt, dass mithin auch eine Belastung von gleicher Grösse hierzu erforderlich ist, hat sich für Gusseisen ein sehr bedeutender Unterschied gezeigt:

Die Verkürzung, welche ein Gusseisenstück bei der durch Druck zu erreichenden Grenze erfährt, ist etwa doppelt so gross als die Verlängerung, welche die Zug-Grenzbelastung bei demselben Stück hervorbringt. Die Grenzbelastung ist für Zug und Druck bei Gusseisen in demselben Verhältniss verschieden, wie man in der Tafel sieht.

Uebung: Berechne die Werthe von E, C, e und c für die Flächeneinheit Geviertzoll (1 Zoll Hbg. = 2,388 cm) und die Krafteinheit Centner = 50 kg!

7. Festigkeitsmodul und Sicherheitsmodul. Diejenige Belastung eines 1 qcm starken Stabes, welche den schliesslichen Bruch des Materials herbeiführt, heisst der Festigkeits- oder Bruchmodul. Derselbe ist für dasselbe Material verschieden, je nachdem die Belastung auf Zug, Druck oder Verschiebung wirkt. Er wird bezw. mit K, K_1 und K_2 bezeichnet.

Die Belastung eines 1 qcm starken Stabes, welche das betreffende Material mit Sicherheit aushalten kann, heisst die zulässige Belastung oder der Sicherheitsmodul. Ebenfalls im allgemeinen verschieden je nach der Art der Belastung, wird er mit k, k_1 und k_2 bezeichnet.

Während der Bruchmodul über den Grenzmodul weit hinausgeht, erreicht nach obigem der Sicherheitsmodul den letzteren bei weitem nicht.

Der Werth des Sicherheitsmoduls ist aber ausser nach Material und Belastungsart auch verschieden nach dem Zweck, dem der betreffende Konstruktionstheil zu dienen hat. Er ist kleiner zu nehmen, wenn, wie im Maschinenbau, stark erschütterte Konstruktionen in Frage kommen als bei gewöhnlichen Gebäuden, und kann beträchtlich grösser gesetzt werden als in letzterem Falle, wenn provisorische Bauten von kurzer Dauer herzustellen sind.

Das Verhältniss des Bruchmoduls zu der bei der Berechnung angenommenen zulässigen Belastung wird der Sicherheitsgrad der Konstruktion genannt.

Wie durch Versuche nachgewiesen, erfolgt der Bruch nicht nur durch eine die Tragfähigkeit überschreitende ruhende Belastung (Bruchmodul), sondern auch durch bedeutend geringere Belastungen, wenn sich dieselben oft genug wiederholen. Oeftere Schwingung oder Spannungsänderung ist um so schädlicher, je mehr sich die angreifende Kraft der zulässigen Spannung nähert. Bleibt die Beanspruchung unter einer gewissen Grenze (Arbeitsfestigkeit), so wird der Körper durch keine bei ihm wirklich vorkommende Anzahl von Wiederholungen zerstört.

8. Festigkeitsmaschinen. Zur Ermittelung aller dieser Werthe, wie sie theils in Tafel I. gegeben sind, theils in folgendem bei Er-

örterung jeder einzelnen Festigkeit aufgeführt werden, sind nun die umfassendsten Versuche erforderlich gewesen, zu deren Anstellung seit mehr als 100 Jahren Maschinen der mannigfaltigsten Art gebaut worden sind.

Die Hervorbringung der erforderlichen Bruchbelastungen (Zug- und Druckkräfte) erfolgt 1. mittelst Hebelwerken, wie bei der Cementzerreissmaschine von Frühling (Uebersetzung 1 : 50), oder 2. durch Kraftschrauben, wie bei den zur Prüfung von Gespinnsten, dünnen Drähten, Papier etc. eingerichteten Maschinen, welche die Grösse der Kraft mittelst Federdynamometer anzeigen, oder 3. durch hydraulischen Druck, wie bei allen für Bauzwecke bestimmten Maschinen.

Erste Maschine zur Prüfung der Gesteinsfestigkeit von Gauthey 1774, bald darauf verbessert von Soufflot. Eine solche diente Rondelet (ebenfalls in Paris) zu seinen vielfachen Versuchen, in: L'art de bâtir niedergelegt. In diesem Jahrhundert, zuerst in England, wird die Kraft durch Anwendung von hydraulischem Druck bedeutend gesteigert. Die Gegenkraft (Reaktion) wird gemessen durch ein Hebelsystem (Kirkaldy London, Harkort Duisburg, Grafenstaden im Elsass) oder durch einen einzelnen Hebel von grosser Uebersetzung (1 : 500) wie bei der in München und Berlin angewendeten Werder'schen Festigkeitsmaschine. Der Druck geht in diesen Maschinen bis zu 100 000 kg. Sie sind sowohl für Zerreissung als für Zerdrückung und Durchbiegung, selbst für grosse Stücke eingerichtet, wobei auch die Grösse der Dehnung, Ausweichung etc. jederzeit abgelesen werden kann.

I. Zugfestigkeit.

1. Grundformeln. Durch Erfahrung wie durch Versuche ist festgestellt, dass der Widerstand des Materials gegen einen Zug in der Längsrichtung im allgemeinen proportional zur Grösse des Querschnittes ist. Danach findet man die Zugspannung P kg, welche einen Stab von f qcm Querschnitt gerade zerreisst, indem man die Bruchbelastung für 1 qcm, welche nach Einl. 7. der Festigkeitsmodul heisst, also K kg mit der Anzahl f multiplicirt.

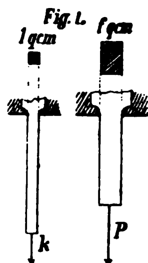
$$P = f \,.\, K \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1);$$

daraus

$$f = \frac{P}{K} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

für denjenigen Querschnitt, welcher durch die Zugspannung P kg gerade zerrissen werden würde.

Wie oben in Einl. 7. erörtert, tritt für auszuführende Konstruktionen an Stelle von K der Sicherheitsmodul k, wonach die Formeln: für die zulässige Belastung bei f qcm Querschnitt



$$P = f.k \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

und für den Querschnitt, welcher der Zugspannung P kg völlig gewachsen ist,

$$f = \frac{P}{k} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

erhalten werden.

Erfahrungsgemäss setzt man den Sicherheitsmodul k für Hölzer gleich dem neunten bis zehnten, für Gusseisen gleich dem sechsten bis siebenten, für Schmiedeeisen gleich dem vierten bis sechsten Theil des Bruchmoduls K. Stehen Bauten von kurzer Dauer in Frage, so dürfen höhere Zahlen gerechnet werden.

2. Tafel II. des Bruch- und des Sicherheitsmoduls für Zug.

Material	Bruchmodul K in kg für 1 qcm	Sicherheitsmodul k in kg für 1 qcm		
		Provisorische Bauten	Gebäude-, Dach-, Brückenkonstruktion	Stark erschütterte Konstruktion (Maschinenbau)
Gusseisen	1250	300	250—200	130
Schmiedeeisen in Stäben .	4000	1200	750—700	500
Stahl, gehärtet	7500	—	1200	1000
Rundeisen zu Ketten . .	—	1000	—	—
Eichenholz, Faserrichtung .	800	130	80	60
Nadelholz, do.	850	120	70	50
Hanfseile	500—800	100	—	—
Cement (rein)	30—40	—	—	—
Cement mit Normalsand (1:3)	16 min	—	—	—

Nach den beiden grundlegenden Formeln $P = f.k$ und $f = P:k$ richtet sich die Tragfähigkeit des stabförmigen Konstruktionstheils auf Zug nur nach dem Material und der Grösse des Querschnitts, nicht etwa nach der Form des letzteren und auch nicht nach der Länge des Körpers.

Die cylindrische Stange eines wagerecht liegenden Ankers von 6 qcm Querschnitt wird ebensoviel Zug aushalten wie eine ebensolche rechteckige von 6 qcm Querschnitt und — homogenes Material vorausgesetzt — ebensoviel,

ob sie 2 m oder 10 m lang ist. Selbstverständlich darf sie an keiner anderen Stelle geringeren Querschnitt haben; stets ist der kleinste Querschnitt massgebend.

Wenn der Körper indessen in lothrechter Lage durch Zug nach unten beansprucht wird, so wirkt sein Eigengewicht in demselben Sinne und vermindert dadurch seine Tragfähigkeit für die Nutzlast. Da nur an der Stelle der Einspannung das ganze Eigengewicht mitwirkt, so ist die Gefahr des Zerreissens für diesen Querschnitt am grössten: Gefährlicher Querschnitt. Erst bei sehr bedeutender Länge kommt übrigens das Eigengewicht in Betracht, wie unten gezeigt wird, so dass man in der Regel davon völlig absehen kann.

3. Beispiele für die Berechnung der Zugfestigkeit, ohne Rücksicht auf Eigengewicht.

1. Eine Zugstange (Schmiedeeisen), 27 mm im Geviert. Die zulässige Zugspannung ist $P = f \,.\, k = 2{,}7 \,.\, 2{,}7 \,.\, 750 = 5467{,}5$ kg.

2. Eine solche ist einzurichten für die Zugspannung 12 t. Wie gross ist die Geviertseite zu nehmen? — Antw.:
$f = P : k = 12\,000 : 750 = 16$. Da $f = a^2$, so ist $a = \sqrt{16} = 4$ cm.

3. Eine Hängesäule ist aus zwei rechteckigen Zangen (Föhrenholz), jede 11 zu 26 cm, konstruirt. Die zulässige Spannung ist $P = f \,.\, k = 2 \,.\, 11 \,.\, 26 \,.\, 70 = 40\,040$ kg.

4. Eine solche hat 50 t zu tragen. Breite einer jeden von beiden Zangen sei 14 cm. Dann ist der erforderliche Querschnitt einer jeden $= 25\,000 : 70 = 357{,}14$ qcm, die Höhe mithin $h = f : b = 357{,}14 : 14 = 25{,}6$ cm.

5. Der grosse Hafenkrahn hat 150 t Tragfähigkeit. Wieviel mm Durchmesser wird die cylindrische Hebestange mindestens haben? — $f = P : k = 150\,000 : 10 = 15\,000$ qmm. Da $f = \frac{1}{4} d^2 \pi$, so ist

$$\frac{\pi}{4} \,.\, d^2 = 15\,000,\ d^2 = 19\,108,\ d = 138{,}2 \text{ mm.}$$

6. Der Durchmesser von 5. beträgt in der That 140 mm. Für das vorzügliche Material und die nicht dauernde Belastung ist $k = 1200$ zu rechnen. — Wie gross ist danach die Tragfähigkeit und wieviel Procent übersteigt sie noch die Probebelastung von 175 t?

7. Der Presskolben einer hydraulischen Presse hatte 440 mm Durchmesser; der höchste Wasserdruck 200 Atm. Wie stark ist jede der vier cylindrischen schmiedeeisernen Säulen zu nehmen?

Kolbenfläche $\pi r^2 = 1519{,}76$ qcm; Gesammtdruck $= 1520 \,.\, 200 = 304\,000$ kg; Zug an jeder Stange $= 76\,000$ kg; Querschnitt $f = 76\,000 : 12 = 6333{,}3$ qmm $= \frac{\pi}{4} d^2$; $d = \sqrt{8068} = 89{,}9$ mm.

8. Ein Eisenanker, welcher den Durchmesser d erfordert, soll am Ende nach umstehender Skizze ausgeschmiedet werden, so

dass die Abmessungen des rechteckigen Querschnittes sich wie 1:5 verhalten.

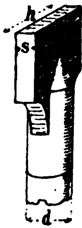


Fig. 2.

$$h\,s = \frac{\pi}{4}\,d^2;\ h = 5\,s.$$

$$5\,s^2 = \frac{\pi}{4}\,d^2$$

$$s = d\sqrt{\frac{\pi}{20}} = 0{,}3963\,d \backsim 0{,}4\,d$$

$$d \backsim 2{,}5\,s;\ h = 2\,d.$$

9. Der Kolbendurchmesser bei 7. war 480 mm, der Durchmesser jeder Stange 84 mm, k = 12 pro 1 qmm. Wieviel Atm. durfte das Manometer höchstens zeigen? — Antw.: 147 Atm.

10. Eine Hängesäule (Föhrenholz), 18 cm im Geviert, hat an der schwächsten Stelle beistehenden Querschnitt. a) Wie gross ist ihre Tragfähigkeit? b) Welchen Durchmesser hätte eine cylindrische Stange (k = 750) an derselben Stelle anzunehmen? — Antw.: a) 12 600. b) Bei gleicher Beanspruchung von Stäben aus verschiedenem Stoff verhalten sich die Querschnitte derselben umgekehrt wie ihre Sicherheitsmoduln; also hier

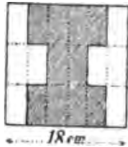


Fig. 3.

$$\frac{\pi}{4}\,d^2 : 18\,000 = 70 : 750,\ \text{daraus}\ d = 46{,}3\ \text{mm}.$$

11. Ein aus dem Hamburger Abbruchviertel stammender, theilweise verrosteter geschmiedeter Eisenstab hatte an der schwächsten Stelle einen kreisförmigen Querschnitt von 19 mm Durchmesser. Zu seiner Zerreissung in einer Grafenstadener Maschine (Kl. Grasbrok) war ein Zug von 8900 kg erforderlich. Wie gross war der Festigkeitsmodul dieses Eisens? — Antw.: 31,4 kg pro qmm.

12. Ein Zug von P = 1900 kg soll von einem Patent-Hanfseil aufgenommen werden. Welcher Durchmesser ist erforderlich?

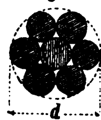


Fig. 4.

Der tragende Querschnitt ist etwa 0,9 von der ganzen Kreisfläche; mithin ist

$$0{,}9\,.\,\frac{\pi}{4}\,d^2\,.\,100 = P;\ d = 1{,}19\sqrt{P : 100};$$

hier ist

$$d = 5{,}187 \backsim 5{,}2\ \text{cm}.$$

4. Berücksichtigung des Eigengewichts. Ist bei lothrechter Lage und nach unten gerichteter Zugspannung P das Eigengewicht G des Stabes zu berücksichtigen, so hat man zunächst als gesammte Beanspruchung des gefährlichen Querschnitts P + G, mithin

$$P + G = f\,.\,k.$$

Nun ist die Länge des Stabes l cm und das specifische Gewicht seines Materials oder besser das Gewicht von 1 ccm, mit p kg bezeichnet, zu kennen nöthig. Dann ist

$$G = f \,.\, l \,.\, p,$$

mithin

$$P + f\,l\,p = f\,k;$$

$$\mathbf{P = f\,(k - lp)} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

und daraus

$$\mathbf{f = P : (k - lp)} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Anm. 1. p ist in kg zu rechnen, da k in kg gegeben ist und lp von k abgezogen wird. l sind cm, da f qcm, und dieses muss so sein, da k für 1 qcm gilt.

Anm. 2. Bei sehr bedeutender Länge wird der Körper auch oft aus mehreren Theilen konstruirt. Für die Querschnitte gilt dasselbe wie S. 18 für den gedrückten Körper.

5. Beispiele für die Berechnung der Zugfestigkeit, mit Rücksicht auf Eigengewicht.

Das specifische Gewicht von Schmiedeeisen ist 7,8, von Föhrenholz 0,6 zu rechnen, mithin ist das Gewicht von 1 ccm Schmiedeeisen p = 7,8 gr = 0,0078 kg etc.

1. Die in Beisp. 1 S. 9 gegebene Zugstange sei 12 m lang in lothrechter Lage eingespannt. Welche Zugspannung ist unter Berücksichtigung des Eigengewichts zulässig? — Antw.:

$$P = 2{,}7 \,.\, 2{,}7 \,.\, (750 - 1200 \,.\, 0{,}0078) = 5399{,}2656 \backsim 5400 \text{ kg}.$$

Die Tragfähigkeit ist also durch das Eigengewicht um ca. 68 kg, d. h. um etwa 1,24 Procent vermindert.

2. Die Stange aus Beisp. 2 S. 9 sei 15 m lang. Welche Geviertseite hat sie unter Berücksichtigung des Eigengewichts anzunehmen? — Antw.: $a^2 = 12\,000 : (750 - 1500 \,.\, 0{,}0078) = 16{,}25$ und daraus a = 4,03 cm. Die Vergrösserung der Dimension beträgt bei der bedeutenden Länge also noch nicht 1 Procent.

3. Die Hängesäule aus Beisp. 10 S. 10 habe eine Länge von 9 m. Um wieviel wird die Nutzlast bei Berücksichtigung des Eigengewichts vermindert? — Antw.: Um das Gewicht der ganzen Säule G = 3,24 . 90 . 0,6 = 174,96 kg oder nicht ganz 1,4 Procent.

4. Ein prismatisches Schachtgestänge (Schmiedeeisen) von 200 m Länge hat ausser seinem Eigengewicht noch 30 t zu tragen. Welchen Querschnitt hat dasselbe anzunehmen (k = 6 pro qmm)? — Antw.: f = 30000 : (6 — 200000 . 0,0000078) = 6757 qmm und die Geviertseite 82,2 mm.

5. Eine hohle cylindrische Hängesäule (Gusseisen), 8 m lang, ist für einen Zug von 6000 kg einzurichten. Die Wandstärke darf wegen der Ausführung nicht unter 1,5 cm genommen werden.

$f = 6000 : (200 - 800 \cdot 0{,}0075) = 30{,}93$ qcm. Sind die Durchmesser D und d, so ist $\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) = 30{,}93$ und $D^2 - d^2 = 39{,}4$. Da aber $D = d + 3$, so ist $6d + 9 = 39{,}4$ und

$$d = 5{,}07 \text{ cm}, \quad D = 8{,}07 \text{ cm}.$$

6. Wie lang müsste ein prismatischer Bleistab sein, der in lothrechter Lage eingespannt, a) nur durch sein Eigengewicht zerrissen würde, b) dasselbe sicher tragen könnte? $K = 130$, $k = 50$; spec. Gew. 11,4.

Aufl. a) $G = f \cdot K$

$$G = f \cdot l \cdot p$$

$$f\,l\,p = f\,K$$

$$l = K : p = 130 : 0{,}0114 = 11\,403{,}5 \text{ cm} = 114{,}035 \text{ m}.$$

Anm. Das Herausfallen von f zeigt, wie schon die Ueberlegung von vornherein ergiebt, dass die Grösse des Querschnitts gleichgiltig ist. Vergleiche auch Anm. 1. zu 4.

7. Das Gestänge aus 4. ist aus 20 Stäben von je 10 m Länge konstruirt. Welche Geviertseiten sind diesen Theilen zugeben? — Mit Hilfe von den Formeln auf S. 18 zu lösen. Wie gross ist die Materialersparniss gegen 4.?

8. Ein (wie vielfach) 36 drähtiges Drahtseil, aus 6 Litzen zu je 6 Drähten bestehend (Eisendraht $k = 800$), ist bei einer Länge von $l = 18$ m für eine Zugspannung $P = 9000$ einzurichten. Welche Drahtstärke δ ist erforderlich und welcher Durchmesser d, wenn $d = 10\,\delta$ angenommen wird?

Das Eigengewicht pro lfd. m kann $= (0{,}8 \cdot n \cdot \delta^2)$ kg bei n Drähten von der Stärke δ cm gesetzt werden. Hiernach ist

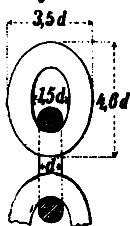
$$P + l \cdot 0{,}8\,n\,\delta^2 = k \cdot n \cdot \frac{\pi}{4}\delta^2$$

$$9000 + 18 \cdot 0{,}8 \cdot 36\,\delta^2 = 800 \cdot 36 \cdot \frac{3{,}14}{4}\delta^2, \text{ woraus } \delta^2 = 0{,}4074$$

und $\delta = 0{,}639$, mithin $d = 6{,}4$ cm.

Welche Stärke ergiebt sich, wenn Gussstahldraht $k = 1520$ genommen wird?

Fig. 5.



9. Für denselben Zweck ist a) eine einfache englische Kette, b) eine Stegkette zu nehmen. Welche Stärke d cm des Rundeisens ist jedesmal erforderlich?

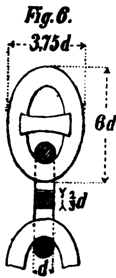
Aufl.: a) Da jedes Kettenglied nicht nur durch Zug, sondern auch durch Biegung beansprucht wird, so ist die Tragfähigkeit bei weitem nicht die doppelte des Rundeisens, sondern verhält sich nach vielfachen Versuchen zu dieser wie 11 : 9. Die zulässige Belastung ist bei

4facher Sicherheit $k = 1000$ zu nehmen. Das Gewicht pro lfd. m ist $\backsim 2{,}33\, d^2$ kg, wobei d in cm auszudrücken ist.

$$P + l \,.\, 2{,}33\, d^2 = \frac{11}{9} \,.\, 1000 \,.\, \frac{\pi}{4}\, d^2,$$

woraus hier

$$d^2 = \frac{9000}{918} \text{ und } d \backsim 3{,}14 \text{ cm.}$$



b) Die Tragfähigkeit der Stegkette ist nach denselben Versuchen $= \frac{9}{7}$ derjenigen der einfachen Kette; also abgesehen vom Gewicht ist $P = 1234\, d^2$. Das Eigengewicht ist aber bei gleicher Länge und gleicher Tragfähigkeit nur $\frac{3}{4}$ von demjenigen der einfachen Kette, so dass auch aus diesem Grunde die Stegkette vortheilhafter ist. Hier ergiebt sich

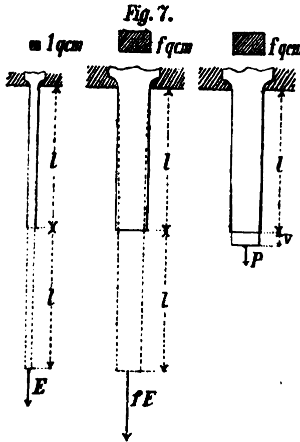
$$d^2 = \frac{9000}{1203} \text{ und } d \backsim 2{,}74 \text{ cm.}$$

Die gleichen Resultate erhält man, wie man sich überzeugen mag, einfacher nach den Formeln:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für englische Ketten} & d = 0{,}033 \sqrt{P} \\ \text{für Stegketten . .} & d = 0{,}028 \sqrt{P}\end{array}\right\} \text{ in cm.}$$

Dieselben sind mit $k = 600$ erhalten, wodurch die Rücksicht auf das Eigengewicht gewahrt ist.

6. Bestimmung der Verlängerung, mit Beispielen. Ferner ist noch die Verlängerung v zu bestimmen, welche ein prismatischer Stab von f qcm Querschnitt und l cm Länge durch einen Zug von P kg erfährt.



Nach den obigen Ausführungen über den Elasticitätsmodul E kg und mit Hilfe der leichtverständlichen Zeichnung Fig. 7 ergiebt sich $v\text{ cm} : l\text{ cm} = P\text{ kg} : (f \,.\, E)\text{ kg}$,

daraus
$$v = l \,.\, \frac{P}{fE} \quad \ldots \quad (7)$$

Die Verlängerung ist also proportional direkt der Länge und der dehnenden Kraft und umgekehrt dem Querschnitt und dem Elasticitätsmodul.

Ist der stabförmige Körper in lothrechter Lage der Zugspannung P kg ausgesetzt, so wirkt sein Gewicht G ebenfalls auf Verlängerung, ist aber nur bei sehr bedeutender Länge in Betracht zu ziehen. Man erhält dafür

$$v = l \,.\, \frac{P + \frac{1}{2} G}{fE}.$$

Die Belastung P ist als eine die Elasticitätsgrenze nicht überschreitende, aber sonst beliebige angenommen. In den meisten Fällen ist aber die Belastung die gerade zulässige $P = f.k.$ Dann wird

$$v = l . \frac{fk}{fE} = l . \frac{k}{E} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

Beispiele. Die Verlängerung ist zu bestimmen für die unter 1. bis 4. S. 11 aufgeführten Beispiele.

1. $v = \frac{1200 . 5400}{7,29 . 2\,000\,000} = 0,44$ cm.

Genau genommen müsste $P + \frac{1}{2} G = 5400 + 34$ gesetzt werden; jedoch verändert solches das Resultat ebenso wenig, als wenn 5468 gesetzt wird.

2. $v = 0,55$ cm.

3. $v = 0,27$ cm, wenn sich die Spannung auf den ganzen Querschnitt vertheilt.

4. $v = \frac{20\,000\,(30\,000 + \frac{1}{2} . 10\,545,6)}{67,6 . 2\,000\,000} = 5,22$ cm.

Ferner 5. Durch welche Belastung würde die Stange aus Beisp. 2. eine Verlängerung von 1 cm erfahren und befindet sie sich dann noch innerhalb der Elasticitätsgrenze?

6. Der Stab aus 11. (S. 10) erfuhr auf eine markirte Strecke von 35 cm eine Dehnung von 0,25 mm durch eine Zugspannung von 3500 kg. Entsprach dieses Verhalten demjenigen von gutem Schmiedeeisen?

Die Spannung war pro qcm $\frac{3500}{2,834} = 1235$ kg, also < 1400 (siehe Taf. I S. 5). Die Dehnung von intaktem Eisen würde gewesen sein: $v = 0,216$ mm und würde innerhalb der Elasticitätsgrenze geblieben sein, während der vorliegende Stab viel leichter nachgab.

II. Zerdrückungsfestigkeit.

1. Grundformeln. Ein prismatischer Körper vom Querschnitt f qcm sei einem Druck in der Längsrichtung ausgesetzt. Uebersteigt hierbei das Verhältniss seiner Länge zur kleinsten Querschnittsabmessung eine gewisse, vom Material und von der Querschnittsform etc. abhängige Grenze, so wird er von der Last durchgebogen und schliesslich zerknickt. Hier wird dagegen vorausgesetzt, dass er zu kurz ist, um seitlich gebogen zu werden, so dass also seine schliessliche Zerstörung ein Zerdrücken, Zermalmen ist.

Dafür gilt nun dasselbe wie für die Zugfestigkeit: Die Tragfähigkeit wächst im allgemeinen mit der Grösse des Quer-

schnitts. Wird der Bruchmodul für Druck pro qcm mit K_1 bezeichnet, so ist die den Bruch herbeiführende Belastung

$$P = f . K_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

und

$$f = P : K_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Der für die praktische Verwendung zulässige Bruchtheil des Festigkeitsmoduls K_1, wie er durch die Erfahrung bestimmt ist, heisst die zulässige Belastung oder der Sicherheitsmodul für Druck und wird mit k_1 bezeichnet. Damit ist die praktische Tragfähigkeit bei f qcm

$$\mathbf{P = f . k_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und der erforderliche Querschnitt für P kg

$$\mathbf{f = P : k_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

2. Tafel III. des Bruch- und des Sicherheitsmoduls für Druck.

Material	Bruchmodul K_1 in kg für 1 qcm	Sicherheitsmodul k_1 in kg für 1 qcm		
		Provisorische Bauten	**Gebäude-, Dach-, Brücken-Konstruktion**	Stark erschütterte Konstruktion (Maschinenbau)
Gusseisen	7000	750	**500**	300
Schmiedeeisen	4000	1200	**750—700**	500
Stahl, gehärtet	7000	—	**1200**	1000
Eichenholz	700	120	**70**	50
Nadelholz	600	100	**60**	40
Basalt, (Porphyr etc.) . .	2000—2500	—	—	—
Granit (Diorit, Syenit etc.)	800—1600	80—160	40—80 { schwedischer 100—150, schlesischer 40—75 }	20—40
Kalkstein (Marmor, Dolomit etc.)	400—1000	40—100	20—50	10—25
Sandstein	260—1500	26—150	13—75	6,5—38
Ziegelstein, hart gebrannt .	230	23	11	5
do. **gewöhnlich** . .	100—180	10—18	5—9	4
Klinker	250—720	25—72	12—36	6—18
Cement mit Normalsand (1 : 3)	160 min	—	—	—
Ziegelmauerwerk mit Luftmörtel (1 Kalk : 3 Sand).	50	5—7	2,5	1,2
Ziegelmauerwerk m. Cementmörtel (1 Cement : 3 feinem Sand	60	6—7	3	1,5
do. do. **nach 90 tägiger Erhärtung**	95	9,5—11	4	2
do. do. **bestes**	—	—	7	—
Baugrund, gewöhnlicher .	—	—	2,5—3	—
do. **fester**	—	—	4—5	—

3. Beispiele für die Berechnung der Zerdrückungsfestigkeit, ohne Rücksicht auf Eigengewicht.

1. Bei einer Festigkeitsprobe wurde ein Hamburger Ziegelstein (aus dem Ostegebiet), in Form eines Würfels von 97 mm Seite, bis zum Zerdrücken belastet. Dazu war in der Grafenstadener Maschine ein Druck von 24 000 kg erforderlich. Wie gross war K_1 pro qcm? — Antw.: 255,1 kg. Der Stein war also Primasorte.

2. Ein Würfel aus Oberkirchener Sandstein, Kante 13 cm, hielt einen Druck von 96 t ohne geringste Beschädigung aus. Wieviel kg überstieg hiernach sein Festigkeitsmodul?

3. Zur Stützung des Frontmauerwerks (bei einem Umbau im Erdgeschoss) werden Stützen aus Eichenholz verwendet; eine jede hat 20 500 kg aufzunehmen. Welche Geviertseite ist erforderlich, wenn Ausbiegung ausgeschlossen ist? $k_1 = 70$. — Antw.: $a = 17{,}2$ cm.

4. Ein auf gutem Baugrund zu errichtender Mauersockel hat einen Druck von 50 t auf den Grund zu übertragen. Wieviel Stein stark im Geviert ist er unten zu nehmen? — Antw.:

$$f = \frac{50\,000}{2{,}5} = 20\,000 \text{ qcm} = a^2; \; a = 141{,}4 \text{ cm},$$

also 6 Steine vom Normalformat oder 7 vom Hamburger Format.

5. Der Sockel aus 4. sei aus gutem Ziegelmauerwerk mit Cementmörtel hergestellt ($k_1 = 7$). Dann hat er 84,6 cm im Geviert anzunehmen, erfordert also oben $3\frac{1}{2}$ Stein Stärke und ist am besten nach unten abgetreppt bis auf 6 Steine zu bringen.

6. Der Untersatz einer Maschine bestehe aus einem kurzen rechteckigen hohlen Prisma aus Gusseisen, dessen Grundriss 0,6 m und 0,4 m äussere Länge und Breite und 15 mm Wandstärke hat. Welchen Druck darf die Maschine darauf ausüben? — Antw.: $P = (2400 - 2109) \cdot 500 = 145\,500$ kg.

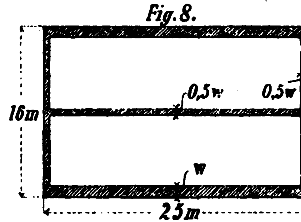
7. Ein solcher Untersatz von 0,5 m und 0,3 m äusserer Länge und Breite ist für einen Druck von 100 t einzurichten. Welche Wandstärke w cm hat er anzunehmen?

$$f = 2 \cdot 50 \cdot w + 2 \cdot (30 - 2\,w) \cdot w = 160\,w - 4\,w^2;$$

$(160\,w - 4\,w^2) \cdot 500 = 100000$, mithin $w^2 - 40\,w = -50$ und daraus $w = 20 \pm \sqrt{350} = 20 \pm 18{,}71$. Da das positive Zeichen unmöglich, so ist $w = 1{,}3$ cm.

8. Die Grundmauern eines 25 m langen und 16 m tiefen Gebäudes von nebenstehendem Grundriss haben eine Gesammtlast von

1 800 000 kg zu tragen. Welche Breite ist der Grundplatte zu geben, wenn der Boden gewöhnlicher Baugrund mit $k_1 = 2,5$ ist?



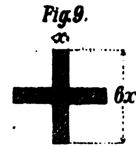
$$78,5\,w - 2,5\,w^2 = 72, \text{ daraus}$$
$$w = 15,7 - \sqrt{217,69} = 0,95 \text{ m}.$$

Die vordere und hintere Mauer sind mit 4, die mittlere und die Seitenmauern mit 2 Steinen zu beginnen.

9. Eine Last von 60 t ist von einer kurzen cylindrischen Säule aus Gusseisen aufzunehmen. Dieselbe soll a) voll, b) hohl mit dem Höhlungsverhältniss 0,6 hergestellt werden.

Für a) muss der Durchmesser $d = \sqrt{152,87} \sim 12,4$ cm sein. Für b) ist $d = 0,6\,D$, mithin $f = \frac{\pi}{4}\,[D^2 - (0,6\,D)^2] = \frac{\pi}{4} \,.\, 0,64\,D^2 = 3,14 \,.\, 0,16\,D^2$, ferner ist $D = 15,45$ und $d = 9,27$ cm, mithin Wandstärke über 3 cm.

10. Für den in 9. bezeichneten Zweck soll eine Flügelsäule aus Gusseisen von beistehendem Verhältniss dienen.



$$f = 6\,x \,.\, x + 5\,x \,.\, x = 11\,x^2;\ 11\,x^2 = 120;$$
$$x = 3,3 \text{ cm}.$$

Die Säule ist 20 cm stark zu nehmen.

11. Ein eiserner Träger, Flanschenbreite 16 cm, überträgt auf das Mauerwerk einen Druck von 6000 kg. Wie weit muss a) der Träger aufgelegt werden ohne Unterlagsplatte; b) wie gross ist die Geviertseite einer Unterlagsplatte zu nehmen? ($k_1 = 7$)

a) $f = 6000 : 7 = 857,14$ qcm; $16 \,.\, l = 857,14$; $l = 53,6$ cm.

b) $a^2 = 857,14$; $a = 29,3$ cm.

12. Mauerstärken nach Redtenbacher. Wenn t die Tiefe des Gebäudes, $h_1\ h_2\ h_3 \,..$ die Stockwerkshöhen von oben gezählt, und $e_1\ e_2\ e_3 \,..$ die Mauerstärken in den entsprechenden Stockwerken bedeuten, so ist

$$e_1 = \frac{t}{40} + \frac{h_1}{25};\ e_2 = \frac{t}{40} + \frac{h_1 + h_2}{25};\ e_3 = e_2 + \frac{h_3}{25} \text{ u. s. f.}$$

Berechne die Stärken für die vier Stockwerke 3,5, 4, 4, 4,5 m eines Fabrikgebäudes, dessen Tiefe = 16 m ist, und runde sie in Steinen ab!

4. Berücksichtigung des Eigengewichts. Für den Fall, dass das Eigengewicht des Stabes auf Druck mitwirkt, ist ebenso wie oben I 4. für den gefährlichen, hier den untersten Querschnitt

$$P = f(k_1 - lp) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

und daraus

$$f = P : (k_1 - lp) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

wobei wieder l cm die Länge und p kg das Gewicht von 1 ccm Material bedeutet.

Fig. 10. P l_1 l_2 l_3 f_1 f_2 f_3

Wird der Druck des ersten Stabes mit der Nutzlast P auf einen zweiten von gleichem Material übertragen u. s. f., so hat jeder folgende grösseren Querschnitt anzunehmen.

Nach obigem ist dann $f_1 = P : (k_1 - l_1 p)$. Für die Bodenfläche f_2 des zweiten Pfeilers ist der Druck $P + f_1 l_1 p + f_2 l_2 p$, mithin

$$f_2 k_1 = P + f_1 l_1 p + f_2 l_2 p$$

und

$$f_2 = \frac{P + f_1 l_1 p}{k_1 - l_2 p},$$

woraus sich durch Einsetzung des Werthes für f_1 schliesslich ergiebt:

$$f_2 = \frac{P k_1}{(k_1 - l_1 p)(k_1 - l_2 p)}.$$

Wie dieser Werth aus f_1, so muss sich f_3 aus f_2 ableiten lassen:

$$f_3 = \frac{P k_1^2}{(k_1 - l_1 p)(k_1 - l_2 p)(k_1 - l_3 p)} \text{ u. s. f.}$$

Werden die Höhen der Pfeiler als gleich angenommen, so ist

$$l_1 = l_2 = l_3 \ldots = l$$

zu setzen und man erhält

$$f_1 = \frac{P}{k_1 - l p} = \frac{P}{k_1}\left(\frac{k_1}{k_1 - l p}\right)^1$$

$$f_2 = \frac{P k_1}{(k_1 - l p)^2} = \frac{P}{k_1}\left(\frac{k_1}{k_1 - l p}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$f_n = \frac{P}{k_1}\left(\frac{k_1}{k_1 - l p}\right)^n.$$

5. Beispiele für die Berechnung der Zerdrückungfestigkeit, mit Rücksicht auf das Eigengewicht.

1. Eine 2,6 m hohe, vor Ausbiegung geschützte, cylindrische hohle Säule aus Gusseisen, Wandstärke 2,5 cm, ist für die Belastung von 30 t einzurichten, a) ohne, b) mit Berücksichtigung des Eigengewichts.

Innerer Durchmesser d cm, äusserer Durchmesser (d + 5) cm.

$$\text{a) } \frac{\pi}{4}[(d + 5)^2 - d^2] = \frac{30\,000}{500} = 60$$

$$10d + 25 = \frac{60 \, . \, 4}{3,14} = 76,43$$

$$10d = 51,43$$

$$d = 5,143 \text{ cm} \quad \text{und} \quad D = d + 5 = 10,143 \text{ cm}$$

$$\sim 10,2 \text{ cm}$$

b) $$\frac{\pi}{4}(10d + 25) = \frac{30\,000}{500 - 260 \, . \, 0,0075}$$

$$10d + 25 = 76,71$$

$$d = 5,171 \text{ cm} \quad \text{und} \quad D = d + 5 = 10,171 \text{ cm}$$

$$\sim 10,2 \text{ cm}$$

2. Ein Mauerpfeiler ($k_1 = 11$) von 1,5 m Höhe hat die Säule aus 1. zu tragen. Welche Geviertseite ist ihm (sowie der Unterlagsplatte, wie eine solche offenbar erforderlich ist) a) oben mindestens zu geben (a cm)? b) Wie gross ist die Geviertseite unten (a_1 cm) mit Berücksichtigung des Eigengewichts (spec. Gew. des Mauerwerks 1,7; k_1 für Baugrund = 3) zu nehmen, wenn der Pfeiler prismatisch aufgeführt wird?

a) Gewicht der Säule $G = 117,87$

$$a^2 = \frac{30\,117,87}{11} = 2738$$

$$a = 52,4 \text{ cm}.$$

b) $a_1 = 104,8$ cm, also 4 Stein stark.

3. Der Sockel sei abgetreppt, also annähernd in Form eines Pyramidenstumpfs herzustellen.

$$a_1^2 \, . \, 3 = 30\,118 + \tfrac{1}{3}(a_1^2 + 52,4 \, . \, a_1 + 52^2,4) \, . \, 150 \, . \, 0,0017$$

$$2,915 \, a_1^2 - 4,454 \, a_1 = 30\,351,39$$

$$a_1 = \frac{2,227}{2,915} + \frac{1}{2,915}\sqrt{88\,479,3} = 102,8 \text{ cm}.$$

Hiernach wird die untere Stärke nicht wesentlich geringer als bei prismatischer Form.

4. Ein Mauerpfeiler von 12 m Höhe ist für eine Last von 25 t in drei Theilen von 5, 4 und 3 m Höhe (von oben) herzustellen. $k_1 = 8$; spec. Gew. 1,6.

Die Geviertseiten sind $a_1 = 58,92$ cm, $a_2 = 61,4$, $a_3 = 63,4$. Für gleiche Höhen $l_1 = l_2 = l_3 = 4$ m würde man erhalten

$$a_1^2 = \frac{25\,000}{8} \, . \, \frac{8}{7,36} = 3125 \, . \, \frac{1}{0,92}$$

$$a_2^2 = 3125 \, . \left(\frac{1}{0,92}\right)^2 \text{ und } a_3^2 = 3125 \left(\frac{1}{0,92}\right)^3,$$

woraus (am besten logarithmisch) $a_1 = 58,28$ cm, $a_2 = 60,77$ cm, $a_3 = 63,35$ cm zu finden ist.

5. Der Pfeiler aus 4. steht vermittelst eines niedrigen Granitsockels auf gutem Baugrund ($k_1 = 3$). Da Granit weit fester als der Mauerstein, so bleibt die obere Fläche des Sockels ebenso gross wie der Querschnitt des untersten Pfeilertheils. Die untere Kante des Sockels dagegen ist aus folgendem zu ermitteln, wobei das Gewicht des Sockels unberücksichtigt bleibt.

$$a_4^2 . 3 = 25\,000 + (1740,5 + 1508 + 1206) . 1,6;$$

woraus

$$a_4 = 103,5 \text{ cm}.$$

6. Welche Höhe dürfte höchstens eine Granitsäule erreichen, welche, vor Ausbiegung geschützt, sich gerade noch sicher tragen sollte? Schwedischer Granit $k_1 = 110$, specifisches Gewicht 2,8.

$$l = \frac{k_1}{p} = \frac{110}{0,0028} = 39\,286 \text{ cm} \backsim 393 \text{ m}.$$

6. Bestimmung der Verkürzung, mit Beispielen. Zur Ermittelung der durch den Druck von P kg bei f qcm Querschnitt hervorgebrachten Verkürzung eines 1 cm langen Pfeilers hat man innerhalb der Elasticitätsgrenze wiederum

$$v = l . \frac{P}{fE}.$$

Ist der Querschnitt gerade der Belastung entsprechend eingerichtet und die zulässige Belastung $= k_1$ angenommen, so ist wie oben I 6.

$$v = l . \frac{k_1}{E} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Unter Berücksichtigung des Eigengewichts G wird dagegen

$$v = l . \frac{P + \frac{1}{2} G}{fE}.$$

Beispiele.

1. Für die Stütze aus Beispiel 3. S. 16 ist bei einer Höhe derselben = 1,8 m die Verkürzung $v = 0,105$ cm.

2. Die Verkürzung der Säule aus Beispiel 1. S. 18 zu bestimmen für beide Fälle a) und b):

a) $$v = \frac{260 . 500}{1\,000\,000} = 0,13 \text{ cm}.$$

b) $G = 117,42$

$$v = 260 . \frac{30\,000 + 58,71}{60,217 . 1\,000\,000} = 0,1298 \text{ cm}.$$

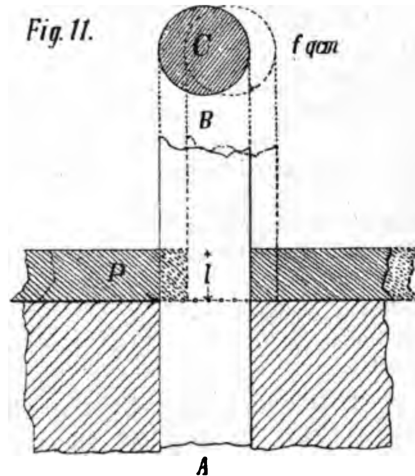
Ist wie hier f auch nach dem Eigengewicht eingerichtet, so wird v, wie man sieht, kleiner, als ohne Rücksicht auf Eigengewicht. Der Grund ist, dass für den Querschnitt das ganze Eigengewicht berücksichtigt wird.

3. Für die Flügelsäule aus Beispiel 10. S. 17 die Verkürzung ohne und mit Rücksicht auf ihr Eigengewicht anzugeben.

4. Die Granitsäule aus 6. S. 20 würde eine Verkürzung von 21,607 cm erfahren (E = 100 000).

III. Schub- oder Abscheerungsfestigkeit.

1. Grundformeln. Ein Konstruktionstheil ist in einem Querschnitt auf Schubfestigkeit in Anspruch genommen, wenn die resultirende Einzelkraft, die Belastung P kg, in der Ebene des Querschnitts wirksam ist. Den Bolzen AB, welcher von der unteren Platte als unbeweglich fest umschlossen angenommen wird, versucht die obere Platte im Querschnitt C durch die Kraft P abzuschneiden. Bei der geringen Länge l des Bolzenstückes, welches sich innerhalb der oberen Platte befindet, ist eine Biegung desselben durch das Kräftepaar, welches ausser der in der Ebene C wirkenden Kraft P, und zwar am Arm $\frac{l}{2}$ wirksam ist, als ausgeschlossen zu betrachten. So wird bei Vergrösserung von P endlich die Trennung der Theilchen im Querschnitt C erfolgen und, wie angedeutet, eine Verschiebung des oberen Theils parallel zu seiner ursprünglichen Lage.



Der Widerstand gegen das Abscheeren ist wie derjenige gegen Zug und gegen Druck der Grösse der Trennungsfläche f qcm proportional. Wird der durch Versuche ermittelte Festigkeitsmodul oder Bruchmodul für Schnb pro 1 qcm mit K_2 bezeichnet, der Sicherheitsmodul oder die zulässige Beanspruchung mit k_2, so ist die Bruchbelastung für f qcm

$$P = f . K_2$$

und die zulässige Belastung

$$\mathbf{P = f . k_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

woraus

$$\mathbf{f = P : k_2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Auch für die Verschiebung des Querschnitts innerhalb der Elasticitätsgrenze gelten dieselben Gesetze wie oben.

Anmerkung. In Fig. 11. ist ebenso wie in den folgenden, zu III. gehörigen Figuren diejenige Fläche, welche gegen Abscheerung Widerstand zu leisten hat, wo es anging, durch eine besondere Bezeichnung kenntlich gemacht worden.

2. Tafel IV. des Bruch- und des Sicherheitsmoduls für Schub.

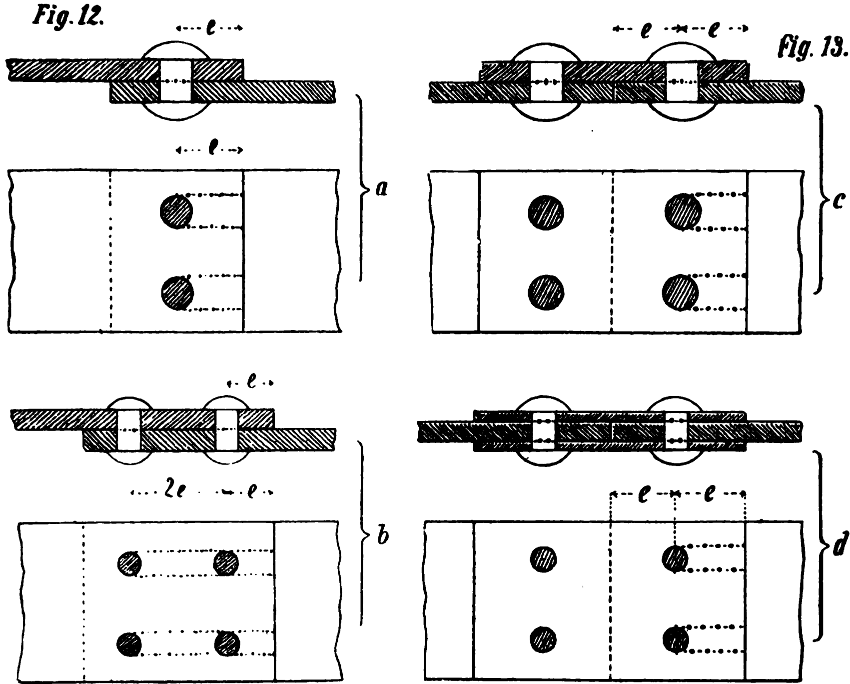
Material	Bruchmodul K_s in kg für 1 qcm	Sicherheitsmodul k_s in kg für 1 qcm		
		Provisorische Bauten	Gebäude-, Dach-, Brückenkonstruktion	Stark erschütterte Konstruktion (Maschinenbau)
Gusseisen	1060	240	200	100
Schmiedeeisen in Stäben	3200	1000	600	400
Nieteisen	3500	1000	700—640	400
Eisenblech	2600	—	600—500	240
Stahl, gehärtet	6000—4800	—	1200—960	800
Eichenholz, Faserrichtung ‖	80	15	10—8	6
Nadelholz, do.	60	10	7—6	4
Eichenholz normal zur Faserrichtung ⊥	90	—	16	—
Nadelholz normal zur Faserrichtung ⊥	70	—	13	—
Kalkstein (Dolomit etc.)	90—60	9—6	5	—
Sandstein	150—70	15—7	8	—
Granit	120—100	12—10	9	—

3. Beispiele für die Berechnung der Schubfestigkeit.

1. Zwei Bänder aus 12 mm starkem Eisenblech sollen durch Nietung verbunden werden; die Spannung beträgt 10 050 kg. Die Stärke der Bolzen ist zu ermitteln a) und b) für Ueberblattungsnietung mit zwei und vier Bolzen; c) für Nietung mit einfacher Lasche; d) für Nietung mit Doppellasche, sowie jedesmal der nöthige Abstand der Bolzen vom Blechrand.

Für die Berechnung ist zunächst in jedem Falle zu überlegen, in welchem bez. in welchen Querschnitten die Bolzen zerschnitten werden würden, wenn sie zu schwach wären. Bis auf d) würde solches offenbar bei jedem Bolzen in einem Querschnitt geschehen: einschnittige Bolzen; bei d) aber in zwei, daher dieses zweischnittige Bolzen sind. Ferner sind es bei a) und c) und d) je zwei, dagegen bei b) vier Bolzen, auf welche zusammen sich die Spannung vertheilt. So sind es also bei b) und bei d) vier, sonst

zwei Kreisquerschnitte, welche zusammen stark genug sein müssen gegen Schub.



Für a) und c) ergiebt sich hiernach der Durchmesser d aus

$$2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{10\,050}{640} \text{ und } d^2 = 10,\ d = 3{,}16 \text{ cm.}$$

Für b) und d) ist $4 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{10\,050}{640}$

$$d^2 = 5 \text{ und } d = 2{,}24 \text{ cm.}$$

Der Abstand e der Bolzenmitte vom Blechrand muss ferner so gross sein, dass das Blech von dem Bolzen nicht durchgerissen wird. Bei der Ueberlegung, in wieviel rechteckigen Flächen solches geschehen würde, ergeben sich bei a) und c) jedesmal vier Rechtecke von der Länge e und der Höhe 12 mm, bei d), wo jede Lasche aus halb so starkem Blech ist, entweder auch vier ebensolche oder acht von der Höhe 6 mm; bei b) vier Rechtecke von der Länge 3 e.

$$4 \cdot 1{,}2 \cdot e = \frac{10\,050}{500};\ e = 4{,}2 \text{ cm.}$$

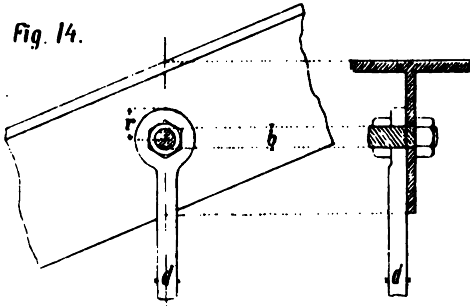
Gewöhnlich wird e = 1,5 d gemacht.

Anmerkung. Das Nähere über die gebräuchlichen Formeln für einreihige und zweireihige Nietungen, letztere in zickzackförmiger Anordnung, über

den Unterschied von Kraft- und Dichtigkeitsnietungen etc. liegt ausserhalb des Rahmens dieses Buches.

2. Eine Zugstange ist an einem eisernen Träger zu befestigen in den beiden aus den Figuren 14. und 15. ersichtlichen Weisen.

Bei Fig. 14. ist der Gelenkbolzen einschnittig.



Durchmesser der Zugstange:

$$\frac{\pi d^2}{4} . 750 = P;$$

$$d = 0{,}0412 \sqrt{P}.$$

Durchmesser des Bolzens:

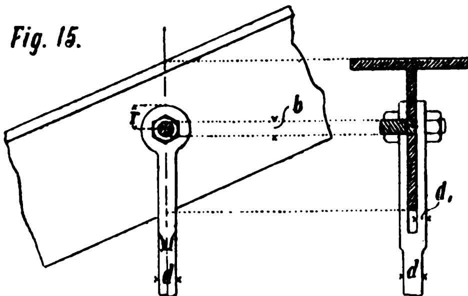
$$\frac{\pi b^2}{4} . 640 = P;$$

$$b^2 = \frac{750}{640} d^2; \quad b = 1{,}082\, d.$$

Radius des Oehrs: erfahrungsgemäss $r = 1{,}5$ b.

Bei Fig. 15. ist der Gabelbolzen zweischnittig.

Durchmesser der Zugstange wie bei a).



Dicke des Gabelarmes:

$$2 . d . d_1 = \frac{\pi . d^2}{4};$$

$$d_1 = 0{,}393\, d.$$

Durchmesser des Bolzens:

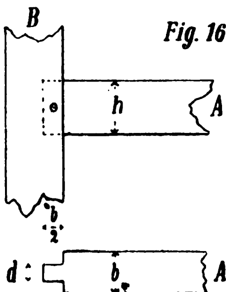
$$2 . \frac{\pi b^2}{4} . 640 = P;$$

$$b^2 = \frac{375}{640} d; \quad b = 0{,}766\, d.$$

Radius des Oehrs $r = 1{,}5$ b.

Man überzeuge sich, dass der angenommene Radius des Oehrs das letztere genügend stark gegen Abscheerung (in welchen Flächen?) macht; ferner dass der Bolzen schon sehr nahe der Kante des Trägers angebracht sein darf, ohne dass ein Durchschneiden des Trägers zu befürchten ist.

Zahlenbeispiel: $P = 12\,000$ kg.



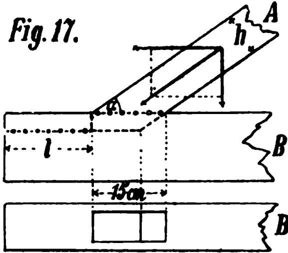
3. Der Holzbalken A von der Höhe $h = 24$ cm und der Breite $b = 18$ cm überträgt auf den unter rechtem Winkel mit ihm verzapften Pfosten B parallel zu dem letztern den Druck $P = 2000$. Wie breit (d) ist der Zapfen zu nehmen?

$$24 . d . 13 = 2000$$

$$d \sim 6{,}4 \text{ cm}.$$

In der Regel nimmt man die Breite des Zapfens $= {}^1/_3\,b$ bei dieser Verzapfung wie auch bei den Eckbildungen, die durch einen Spaltzapfen oder durch einen schwalbenschwanzförmigen Zapfen bewirkt werden.

4. Die Strebe A, in welcher die Druckspannung 3000 kg herrscht, ist mit dem Stützbalken B durch einen Schrägzapfen verbunden. Die Neigung der Strebe ist diejenige von einem $\frac{1}{3}$ Dach. Breite und Tiefe des Zapfens sind 14 cm und 4,5 cm. Wieviel Holz muss vor dem Zapfen stehen, und ist der Zapfen selbst bei einer Länge von 15 cm stark genug gegen Abscheerung? ($k_2 = 6$ für $\parallel$ und $k_2 = 12$ für $\perp$)



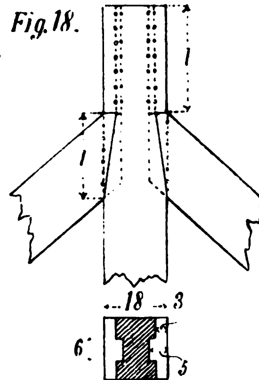
Aus dem Strebendruck entsteht durch Zerlegung der Horizontalschub $P \backsim 2500$. Die abzuscheerende Fläche des Stützbalkens ist insgesammt $14 \,.\, l + 2 \,.\, 4{,}5 \,.\, l = 23\, l$ qcm; also

$$23\, l = \frac{2500}{6};\ l = 18{,}2 \text{ cm}.$$

Ferner ist die abzuscheerende Fläche der Strebe selbst $14 \,.\, 15 = 210$ qcm; also übersteigt ihre Widerstandsfähigkeit $210 \,.\, 12 = 2520$ kg die auf Abscheeren gerichtete Kraft.

Anmerkung. Diese Maasse sind umsomehr genügend, als die durch den Vertikaldruck hervorgebrachte Reibung den Widerstand noch verstärkt. — Ist die Strebe ihrer ganzen Breite nach einzulassen, so muss das vorliegende Holz mindestens gleich der Zapfenlänge, $= \frac{h}{\sin \alpha}$ sein. — Die Zapfentiefe gewöhnlich ${}^1/_4$ der Höhe des Stützbalkens.

5. Die Säule eines einfachen Hängewerks hat die Zugspannung 12 000 kg auf die Streben zu übertragen. Ihr Querschnitt ist 18 cm im Geviert. Wie hoch muss für nebenstehende Konstruktion der Kopf überstehen?



Die abzuscheerende Fläche ist:

$$2 \,.\, 18 \,.\, l + 4 \,.\, 2 \,.\, l = 44\, l \text{ qcm},$$

mithin

$$44\, l = \frac{12\,000}{6};\ l = 45{,}5 \text{ cm}.$$

Man berechne, ob der angeordnete Querschnitt für die Hängesäule genügend stark ist; ferner wie lang (l_1) der Zapfen jeder Strebe mindestens sein muss ($k_2 = 12$).

6. In ein 15 cm starkes Eisenblech sollen Löcher von 25 cm Durchmesser gestanzt werden. Welche Kraft ist dazu erforderlich?

Das Blech wird getrennt in einem Walzenmantel $\pi \,.\, 2{,}5 \,.\, 1{,}5$; mithin ist die Kraft $= 3{,}14 \,.\, 2{,}5 \,.\, 1{,}5 \,.\, 2600 = 30\,615$ kg.

Aufgaben zur Anwendung von I., II. und III.

1. Fussbodenbalken 10 m freiliegend, 0,9 m v. M. z. M., Totalbelastung 1000 kg pro qm, sind in der Mitte an einem Ueberzug mittelst Bolzen aufgehängt. a) Wie stark sind die cylindrischen Eisenbolzen zu nehmen? ($k = 750$). b) Wie weit müssen die Balken auf der Mauer aufliegen, wenn sie 18 cm breit genommen werden? ($k_1 = 4$). c) Wie ist die quadratische Unterlagsplatte auf jeder Seite des 8 m freiliegenden Ueberzugs einzurichten? ($k_1 = 4$).

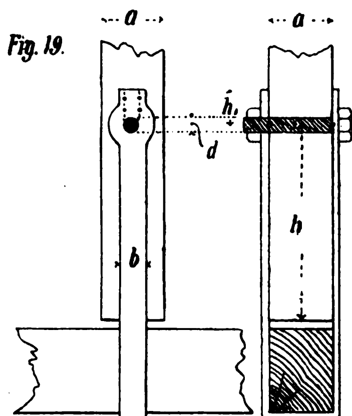
a) Von der über den ganzen Balken vertheilten Last

$$10 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1000 = 9000 \text{ kg}$$

kommen auf die Mitte $\frac{5}{8}$, also 5625 kg. Daraus

$$d = \sqrt{9{,}56} = 3{,}09 \text{ cm} \backsim 31 \text{ mm}.$$

2. Der 11 m lange Hauptbalken eines einfachen Hängewerks ist pro lfd. m mit 1200 kg belastet anzunehmen. Die Säule, an der schwächsten Stelle von der Form wie in 10. (S. 10), ist vermittelst des Hängeeisens mit dem Hauptbalken verbunden. a) Welche Geviertseite hat die Säule anzunehmen? b) Wie breit ist das Eisenband zu nehmen, wenn es 10 mm stark ist? c) Wie stark der Bolzen? d) Wie hoch über dem Ende der Säule ist er anzubringen? e) Wie viel Eisen muss über dem Bolzen stehen?



a) $f = \frac{8250}{70} = 118$ qcm; $a^2 - \frac{8}{18}\,a^2 = 118$; $a = 14{,}58 \backsim 15$ cm.

b) $2 \,.\, b \,.\, 1 \,.\, 700 = 8250$; $b = 5{,}89$ cm $\backsim$ 59 mm.

c) $2 \,.\, \frac{\pi\, d^2}{4} = \frac{8250}{640}$; $d = \sqrt{8{,}21} = 2{,}87$ cm $\backsim$ 29 mm.

d) $2 \,.\, 15\,h \,.\, 6 = 8250;\ h = 45{,}8$ cm $\backsim$ 46 cm.

e) $4 \,.\, 1\,h_1 \,.\, 500 = 8250;\ h_1 = 4{,}13$ cm $\backsim$ 42 mm.

Die Breite des Eisenbandes ist, mindestens an der Stelle des Bolzens, um den Durchmesser desselben verstärkt zu nehmen.

Das Eisenband ist ferner unter dem Hauptbalken in zwei Rechtecken auf Scheerfestigkeit in Anspruch genommen. Wie die Rechnung ergiebt, ist das Band von 1 cm Stärke hierzu nicht ausreichend. Man zieht deshalb und, um ein „Nachziehen“ des Hängeeisens nach seiner ersten Befestigung möglich zu machen, folgende Konstruktion vor: Das Band läuft beiderseits unten in eine Schraubenspindel aus und an diese wird eine unter den Hauptbalken gelegte Schiene festgeschroben.

3. Ein rechteckiger Raum, 10 m zu 8 m im Grundriss, 2,5 m hoch, soll überdeckt werden in der angegebenen Weise. Total-Belastung der Decke pro qm 1200 kg. Der eiserne Längsträger liegt in der Mitte auf einer gusseisernen Säule und ist über derselben gestossen. Auf die Mauer überträgt er den Druck mittelst einer Unterlagsplatte, welche 50 cm breit sei. Die vor Ausbiegung geschützte Säule ist in einem der angegebenen Querschnitte anzuordnen.

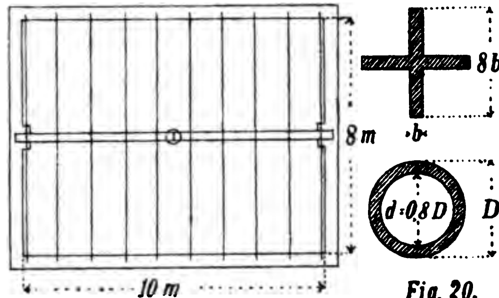


Fig. 20.

Die 8 m langen Balken übertragen $\frac{5}{8}$ von der Gesammtlast der Zwischendecke, also $\frac{5}{8} \,.\, 80 \,.\, 1200 = 60\,000$ kg, auf den eisernen Träger. Von dieser Last nimmt jede Mauer $\frac{1}{4}$, $= 15\,000$ kg, die Säule $\frac{1}{2}$, $= 30\,000$ kg auf.

Kreuzquerschnitt:

$$(b \,.\, 8\,b + 7\,b \,.\, b) \,.\, 500 = 30\,000;\quad b^2 = 4;\quad b = 2 \text{ cm};\quad 8\,b = 16 \text{ cm}.$$

Hohlkreisquerschnitt: $\frac{\pi}{4}\,(D^2 - 0{,}8^2\,D^2) \,.\, 500 = 30000;$

$$0{,}36\,D^2 = 76{,}43;\ 0{,}6\,D = 8{,}8;\ D = 14{,}6 \text{ cm};\ d = 11{,}6 \text{ cm}.$$

Will man eine Unterlagsplatte vermeiden, so ist der Träger weiter aufzulegen und hierzu gewöhnlich ein Pfeiler vorzumauern.

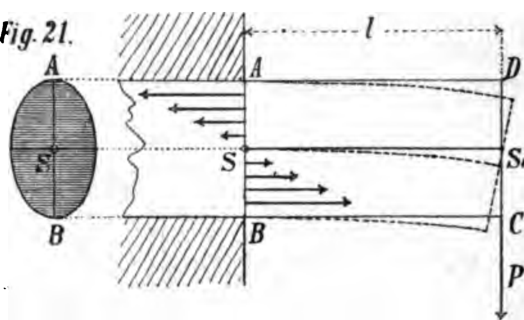
Bei einer Trägerbreite von 20 cm müsste das Ende fast 1 m weit aufliegen.

Seite der Unterlagsplatte: $50 . x . 7 = 15\,000$; $x = 43$ cm.

Sollte der Durchmesser der Flügelsäule 15 cm betragen, so wäre $30\,b - b^2 = 60$; $b - 15 = \pm 12{,}845$; $b = 2{,}16 \sim 2{,}2$ cm.

IV. Biegungs- oder relative Festigkeit.

1. Einleitung. Setzen sich die auf einen stabförmigen Körper einwirkenden Kräfte zu einem Kräftepaar zusammen, dessen Ebene durch die Stabachse geht, so wird der Körper gebogen und leistet Biegungs- oder relative Festigkeit. Hier z. B. bildet die am freien Ende des Trägers wirkende Last P und die dadurch hervorgerufene, ihr gleiche Reaktion der Stütze ein Kräftepaar mit dem Arm l.



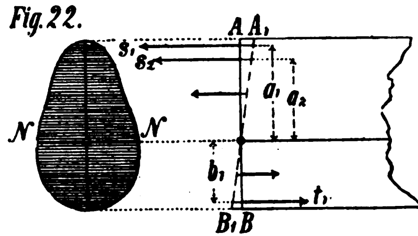
Die Betrachtung erstreckt sich auch hier nur auf stabförmige Körper und zwar zunächst in wagerechter Lage. Ein solcher wird aus Fasern d. i. liniendünnen Streifen bestehend gedacht. Die Schwerpunkte sämmtlicher Querschnitte liegen in einer Geraden, der Achse des Stabes. Die Beanspruchung erfolgt in der Achse durch lothrechte Kräfte, zu denen auch, falls es bedeutend genug ist, das absolute Gewicht des Stabes selbst zu rechnen ist. In dem angenommenen Falle liegen also die biegenden Kräfte: Das Eigengewicht und die Kraft P, sowie die Reaktion der Stütze, in der Ebene ABCD und gehen durch die Achse SS_1 des Stabes.

Bei der eintretenden Biegung sind nun immer alle diejenigen Fasern, welche in derselben wagerechten Ebene liegen, gleich beansprucht. Der ganze Körper ist daher als aus äusserst dünnen, parallelen, ursprünglich ebenen Faserschichten zusammengesetzt zu denken. Durch die Biegung werden dieselben in die Form von cylindrischen Flächen gebracht und sind auch in dieser Form als parallel anzunehmen. Ueberall ist der Querschnitt, d. h. derjenige Schnitt, welcher senkrecht zu dem betreffenden Element der ge-

krümmten Fläche steht, von derselben Grösse und Form wie der Querschnitt im unbelasteten Körper.

Die äusseren (hier oberen) Fasern werden offenbar verlängert, die inneren (unteren) verkürzt, und zwar beides umsomehr, je weiter nach oben und unten sie liegen. Es muss also eine Faserschicht geben, welche weder verlängert noch verkürzt wird bei der Biegung. Diese, die neutrale Faserschicht behält ihre ursprüngliche Länge bei; ihre neue, im lothrechten Längsschnitt ABCD erscheinende Form heisst die elastische Linie.

2. Lage der Drehachse und der neutralen Schicht. Bei der Biegung kommt der Querschnitt AB, ohne seine ebene Form zu verlieren, durch Drehung um die Achse, welche in der neutralen Faserschicht liegt, in die Lage A_1B_1. Hierbei erfahren die oberen Faserschichten eine Verlängerung und leisten Widerstand gegen Zug; die unteren eine Verkürzung und leisten Widerstand gegen Druck. Und zwar verhalten sich, wie leicht aus der parallelen Lage der Fasern zu ersehen, die Verlängerungen bez. Verkürzungen der einzelnen Fasern wie die Abstände der betreffenden Schichten von der Drehachse. Da aber der hervorgebrachten Längenänderung der Widerstand proportional ist, welcher in der betreffenden Faser erwacht, so müssen sich auch die Widerstände der Fasern wie ihre Abstände von der Drehachse verhalten. Werden die Widerstände gegen Zug mit s_1, $s_2 \ldots$, gegen Druck mit t_1, $t_2 \ldots$, jedesmal für die Flächeneinheit als Querschnitt, bezeichnet, so ist hiernach mit Bezug auf die Figur 22.



$$s_1 : s_2 : \ldots : t_1 : t_2 : \ldots = a_1 : a_2 : \ldots : b_1 : b_2 \ldots$$

Wenn nun die Fasern in der obersten wagerechten Schicht in Summe den Querschnitt f_1 Flächeneinheiten haben, diejenigen in der zweitobersten f_2 u. s. f., ferner in der untersten g_1 Flächeneinheiten u. s. f., so sind die Gesammtwiderstände der Faserchichten

$$f_1 s_1,\ f_2 s_2 \text{ u. s. f., sowie } g_1 t_1,\ g_2 t_2 \text{ u. s. f.}$$

Nun findet aber nur eine Drehung des Querschnitts und keine Bewegung desselben in der Längsrichtung statt; deshalb ist die Resultante, d. i. die algebraische Summe sämmtlicher in dem Querschnitt erwachender Widerstände $= 0$.

$$f_1 s_1 + f_2 s_2 + \ldots + f_n s_n = g_1 t_1 + g_2 t_2 + \ldots + g_n t_n$$
oder kurz $\Sigma f s = \Sigma g t$.*)

Wird der von der Flächeneinheit in der alleräussersten Schicht geleistete Widerstand auf der gezogenen Seite mit s kg, auf der gedrückten mit t kg bezeichnet, und sind die Abstände dieser äussersten Faserschichten von der Drehachse bez. e und e_1, so ist zunächst $s : t = e : e_1$. Ferner ist, um die Widerstände in den anderen Faserschichten zu ermitteln,

$$s_1 : s = a_1 : e,$$
woraus
$$s_1 = \frac{s a_1}{e};$$
ebenso
$$s_2 = \frac{s a_2}{e}$$
$$\vdots$$
$$s_n = \frac{s a_n}{e}$$

$$t_1 : t = b_1 : e_1,$$
woraus
$$t_1 = \frac{t b_1}{e_1};$$
ebenso
$$t_2 = \frac{t b_2}{e_1}$$
$$\vdots$$
$$t_n = \frac{t b_n}{e_1}$$

Obige Gleichung ergiebt hiernach:
$$f_1 . \frac{s a_1}{e} + f_2 . \frac{s a_2}{e} + \ldots + f_n . \frac{s a_n}{e} = g_1 . \frac{t b_1}{e_1} + g_2 . \frac{t b_2}{e_1} + \ldots + g_n . \frac{t b_n}{e_1},$$
woraus
$$\frac{s}{e} \Sigma f a = \frac{t}{e_1} \Sigma g b .$$
Da aber auch nach obigem $\frac{s}{e} = \frac{t}{e_1}$ ist, so ist
$$\Sigma f a = \Sigma g b,$$
d. h. die Summe der statischen Momente aller Querschnittstheilchen, die auf der einen Seite der Drehachse liegen, ist gleich der Summe der statischen Momente aller auf der andern Seite liegenden Querschnittstheilchen. Folglich muss die Drehachse NN durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen.

3. Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften. Die Wirkung der äusseren Kräfte, welche die Drehung des Querschnitts hervorbringen, wird nun stets durch ein statisches Moment M oder die algebraische Summe mehrerer statischer Momente gemessen. Dieses Biegungsmoment ist für die

---

*) Die Summe von unendlich vielen Gliedern, welche alle in gleicher Weise aus analogen Grössen zusammengesetzt sind, wird durch ein vorgesetztes Σ (Summenzeichen) dargestellt. Während in jedem Glied die zusammengehörigen Grössen mit dem gleichen Zeiger versehen sind, z. B. $f_1 s_1$, $f_2 s_2$ u. s. f., setzt man hinter das Summenzeichen dieselben Grössen, aber ohne Zeiger in derselben Verbindung, also hier $\Sigma f s$ u. s. f.

verschiedenen Querschnitte je nach ihrer Lage zur Belastung etc. von verschiedener Grösse und hat für einen bestimmten Querschnitt den grössten Werth. Dieser Querschnitt heisst der gefährliche Querschnitt. In unserem Falle: Last P kg am Ende, ist es der Querschnitt AB an der Stelle der Einspannung (siehe Fig. 21. und 22.) und das Biegungsmoment ist, abgesehen vom Gewicht des Stabes,

$M_{max} = Pl$ (Benennung „Kilogramm-centimeter“ kg cm).

Soll Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften stattfinden, so muss die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf die Drehachse NN gleich Null sein oder das Biegungsmoment muss gleich der algebraischen Momentensumme aller Widerstände sein. Letztere, ob Zug- oder Druckwiderstände, wirken aber in demselben Sinne, daher ihre einzelnen Momente sämmtlich gleiches Vorzeichen haben.

Soll der Körper die Biegung mit voller Sicherheit aushalten, so dürfen die äussersten Fasern des gefährlichen Querschnitts höchstens soweit beansprucht werden, dass ihr Widerstand pro qcm den bekannten Sicherheitsmodul für Zug und für Druck erreicht. Für die oben allgemein angenommenen Widerstände s und t sind also die Werthe k und k_1 zu setzen. Hiernach hat man, da a_1, a_2 u. s. f. die Arme der Widerstände sind, folgende Gleichung zwischen den äusseren und inneren Kräften für den Fall des Gleichgewichts:

$$M_{max} = \left(\frac{k}{e} f_1 a_1\right) a_1 + \left(\frac{k}{e} f_2 a_2\right) a_2 + \ldots + \left(\frac{k}{e} f_n a_n\right) a_n + \left(\frac{k_1}{e_1} g_1 b_1\right) b_1$$

$$+ \ldots + \left(\frac{k_1}{e_1} g_n b_n\right) b_n,$$

$$\text{oder } M_{max} = \frac{k}{e} \Sigma f a^2 + \frac{k_1}{e_1} \Sigma g b^2.$$

Nun sind die Werthe von k und k_1 für dasselbe Material im allgemeinen verschieden. Wird der Querschnitt, wie es am vortheilhaftesten ist (näheres darüber siehe unten), so eingerichtet, dass die Abstände e und e_1 sich ebenso wie die zulässigen Beanspruchungen verhalten, also $e : e_1 = k : k_1$, so wird $\frac{k}{e} = \frac{k_1}{e_1}$ und

$$M_{max} = \frac{k}{e} (\Sigma f a^2 + \Sigma g b^2) \left[= \frac{k_1}{e_1} (\Sigma f a^2 + \Sigma g b^2)\right].$$

Der Klammerausdruck besteht aus der Summe von unendlich vielen Produkten. Jedes derselben ist gebildet aus dem Querschnitt einer Faserschicht und der zweiten Potenz ihres Abstands von der Drehachse. Man nennt den Ausdruck

das **Trägheitsmoment** und bezeichnet ihn mit **J.**

Daher ist allgemein

$$M = \frac{k}{e} J \left[= \frac{k_1}{e_1} J \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

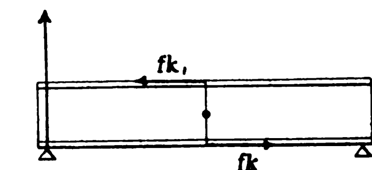
Für den Werth des Quotienten $\frac{J}{e}$ hat man noch den Ausdruck

Widerstandsmoment und die Bezeichnung **W**,

ebenso für $\frac{J}{e_1}$ die Bezeichnung W_1. So ist endlich die allgemeine Formel für die Biegungsfestigkeit

$$M = k\,W \; (= k_1\,W_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19)$$

Zusatz. Für den Fall, dass der Widerstand eines Querschnitts wegen der eigenthümlichen Form desselben fast nur in seinen äussersten Theilen liegt, wie bei den hohen Blechträgern, wo das senkrechte Stehblech im wesentlichen nur zum Auseinanderhalten der Kopfbleche dient, kann ein abgekürztes Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung jedes Kopfblechquerschnitts f dienen.



Der zulässige Widertand eines jeden solchen Querschnitts ist $= f\,k$, wenn $k =$ oder $< k_1$ ist, sein Arm (Abstand von der Drehachse) $= \frac{h}{2}$, wenn h die Höhe des Stehblechs bedeutet. Hiernach ist

$$M = 2\,.\,(f\,k)\,.\,\frac{h}{2} \text{ und } f = \frac{M}{k\,h}.$$

Ausführliche Erörterung siehe unter 12. Aufgabe 31.

Anmerkung. Jeder Querschnitt des der Biegung ausgesetzten Trägers hat ausser den betrachteten Kräften, welche sich zu einem Kräftepaar zusammensetzen lassen, auch eine mehr oder weniger grosse Transversalkraft (Querkraft) auszuhalten, die in gewissen Fällen auch gleich Null werden kann. (Näheres darüber weiter unten.) Dieselbe wirkt offenbar auf Abscheerung; z. B. wird in dem in 1. betrachteten Fall jeder Querschnitt des Freiträgers durch die Kraft P kg auf Schub in Anspruch genommen.

Wenn diese Beanspruchung zunächst ganz unberücksichtigt bleibt, so hat solches darin seinen Grund, dass in der Regel der auf Biegung berechnete Querschnitt auch gegen diese Scheerkraft überreichlich stark ist.

4. Der Werth des Trägheitsmoments J ist nun nach dem vorigen abhängig allein von der Form, Grösse und Lage des Querschnitts. Man hat den Schwerpunkt desselben zu ermitteln, den Inhalt eines jeden von den unendlich vielen wagerechten Streifen mit seinem Abstand von der Drehachse in der zweiten Potenz, zu multipliciren, und endlich sämmtliche erhaltenen Produkte zu addiren.

Von einem **Rechteck**, dessen Breite und Höhe $= b$ und $= h$ gegeben sind, ergiebt sich z. B. das Trägheitsmoment J für dessen Schwerpunktsachse in folgender Weise: Man ermittelt zunächst J_1 von einem Rechteck von der Breite b und der Höhe $a = \frac{h}{2}$ für die Achse, welche durch b geht.

Die Höhe a sei in sehr viele z. B. n gleiche Theile getheilt, so dass der Inhalt jedes der n gleichen Rechtecke $= b \cdot \frac{1}{n} a$ ist. Wird die Zahl n gross genug genommen, so lässt sich annehmen, dass alle Theile eines und desselben Streifens gleichen Abstand von der Achse haben, also des ersten Streifens (zunächst der Achse) den Abstand $\frac{1}{n} a$, des zweiten den Abstand $\frac{2}{n} a \ldots$, des äussersten den Abstand $\frac{n}{n} a$. Danach wird also

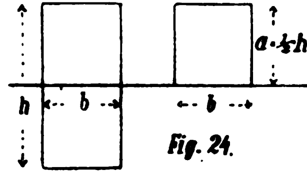


Fig. 24.

$$J_1 = b \cdot \frac{1}{n} a \cdot \left(\frac{1}{n} a\right)^2 + b \cdot \frac{1}{n} a \cdot \left(\frac{2}{n} a\right)^2 + b \cdot \frac{1}{n} a \cdot \left(\frac{3}{n} a\right)^2 + \ldots$$

$$\ldots + b \cdot \frac{1}{n} a \cdot \left(\frac{n}{n} a\right)^2 = b \cdot \frac{a^3}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2).$$ Nun ist stets

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n (n + 1)(2n + 1),$$ mithin

$$J_1 = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} = b a^3 \cdot \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

Wird nun die Anzahl der Streifen als unendlich gross angenommen, unter welcher Annahme erst alle Theile desselben Streifens gleichen Abstand von der Drehachse haben, so ist

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0 \text{ und}$$

$$J_1 = b a^3 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{1}{3} b a^3.$$

Für das Rechteck um seine Schwerpunktsachse hat man nun offenbar

$$J = 2 J_1 = \frac{2}{3} b a^3 = \frac{2}{3} b \cdot \left(\frac{1}{2} h\right)^3$$

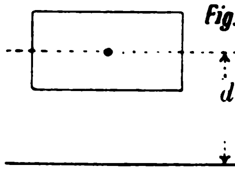
oder

$$J = \frac{1}{12} b h^3. \qquad \ldots \ldots \ldots \qquad (20)$$

Wichtige Sätze vom Trägheitsmoment.

1. Um das Trägheitsmoment J_1 eines Querschnitts für eine ausserhalb seines Schwerpunkts liegende Achse zu ermitteln, hat man durch seinen Schwerpunkt die zu jener parallele Achse zu legen.

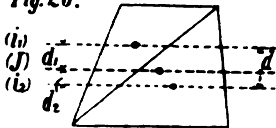
Ist das Trägheitsmoment für die letztere $= J$ und der Abstand der Achsen $= d$, der Inhalt des Querschnitts $= f$, so ist



$$J_1 = J + f d^2 \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Leite hiernach die Formel für das Rechteck Schwerpunktsachse $\|$ b aus der Formel für das Rechteck Seitenachse $\frac{1}{3} b a^3$ ab!

2. Besteht eine Figur aus zwei Theilen, deren Inhalte $= f_1$ und f_2, sowie deren Trägheitsmomente in Bezug auf parallele Schwerpunktsachsen $= i_1$ und i_2 gegeben sind, so ist das Trägheitsmoment für die ganze Figur in Bezug auf die jenen beiden Achsen parallele Schwerpunktsachse



$$J = i_1 + i_2 + \frac{f_1 f_2 d^2}{f_1 + f_2} \quad . \quad . \quad (22)$$

wobei d den Abstand der beiden ersten Achsen bedeutet. Ebenso hat man, wenn eine Figur die Differenz von zwei Figuren ist,

$$J = i_1 - i_2 - \frac{f_1 f_2 d^2}{f_1 - f_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Leite hiernach aus dem Trägheitsmoment für das ganze Rechteck $\frac{1}{12} b h^3$ das Trägheitsmoment für das Dreieck um seine zu b parallele Schwerpunktsachse, $= \frac{1}{36} b h^3$, ab! Ferner daraus das Trägheitsmoment für das Dreieck um die Seite b, $= \frac{1}{12} b h^3$ und um die durch seine Spitze $\|$ b gelegte Achse, $= \frac{1}{4} b h^3$.

Die Beweise von Satz 1. und 2. ergeben sich unter Berücksichtigung bekannter Sätze aus der Statik.

3. Wird jedes Flächenelement mit der zweiten Potenz seiner Entfernung vom Schwerpunkt multiplicirt, so heisst die Summe aller dieser Produkte das polare Trägheitsmoment J_p. Legt man durch den Schwerpunkt zwei beliebige, aber sich rechtwinkelig schneidende Achsen, so heissen die beiden darauf bezogenen Trägheitsmomente die äquatorialen Trägheitsmomente J_x und J_y. Es ist dann, wie leicht zu beweisen,

$$J_p = J_x + J_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Leite hiernach mit Hilfe der Uebung zu 2. das äquatoriale Trägheitsmoment des Kreises $= \frac{\pi r^4}{4}$ ab!

Anl. Nehme die Kreisfläche als in unendlich viele Ausschnitte getheilt an. Die Summe der Trägheitsmomente von allen diesen in Bezug auf den Mittelpunkt ergiebt sich $= \frac{1}{4} r^3 . 2 r \pi = \frac{1}{2} \pi r^4$; dieses ist das polare Trägheitsmoment des Kreises. Das äquatoriale ist die Hälfte des polaren.

5. Tafel V. der Trägheits- und der Widerstandsmomente für die Schwerpunktsachsen.

Nr.	Form des Querschnitts	Trägheitsmoment J	Abstand e der äussersten Fasern	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$	Inhalt des Querschnitts f
1.		$\frac{1}{12} b h^3$	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{6} b h^2$	$b h$
2.		$\frac{1}{12} a^4$	$\frac{1}{2} a$	$\frac{1}{6} a^3$	a^2
3.		$\frac{1}{12} a^4$	$\frac{1}{2} a \sqrt{2}$	$\frac{1}{12} a^3 \sqrt{2}$	a^2
4.		$\frac{1}{12} b (h^3 - h_1^3)$	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{6} \frac{b}{h} (h^3 - h_1^3)$	$b (h - h_1)$

Nr.	Form des Querschnitts	Trägheitsmoment J	Abstand e der äussersten Fasern	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$	Inhalt des Querschnitts f
5.		$\frac{1}{12}(b\,h^3 - b_1\,h_1^{\,3})$	$\frac{1}{2}\,h$	$\frac{1}{6}\,\frac{b\,h^3 - b_1\,h_1^{\,3}}{h}$	$b\,h - b_1\,h_1$
6.		$\frac{1}{12}(b\,h^3 + b_1\,h_1^{\,3})$	$\frac{1}{2}\,h$	$\frac{1}{6}\,\frac{b\,h^3 + b_1\,h_1^{\,3}}{h}$	$b\,h + b_1\,h_1$
7.		Nach Vorherbestimmung der Schwerpunktslage: $\frac{1}{3}(b\,h^3 + b_1\,h_1^{\,3} - b_2\,h_2^{\,3})$	$\{h$	$\frac{1}{3}\,\frac{b\,h^3 + b_1\,h_1^{\,3} - b_2\,h_2^{\,3}}{h}$	$b\,h + b_1\,h_1 - b_2\,h_2$

Nr.	Form des Querschnitts	Trägheitsmoment J	Abstand e der äussersten Fasern	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$	Inhalt des Querschnitts f
8.		$\frac{\pi}{4} r^4 = \frac{\pi}{64} d^4$	$r = \frac{1}{2} d$	$\frac{\pi}{4} r^3 = \frac{\pi}{32} d^3$	$\pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$
9.		$\frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4) = \frac{\pi}{64}(d^4 - d_1^4)$	$r = \frac{1}{2} d$	$\frac{\pi}{4} \frac{r^4 - r_1^4}{r} = \frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$	$\pi(r^2 - r_1^2) = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_1^2)$
10.		$\frac{\pi}{64} d^4 + \frac{1}{12} [b (h^3 - d^3) + (h - d) b^3]$	$\frac{1}{2} h$	$\frac{1}{6 h} \left[\frac{3 \pi}{16} d^4 + b (h^3 - d^3) + (h - d) b^3\right]$	$\frac{\pi}{4} d^2 + 2 b (h - d)$
11.		$0{,}5413 r^4$	$\frac{1}{2} r \sqrt{3}$	. . . . $0{,}625 r^3$	. . . . $2{,}598 r^2$

Nr.	Form des Querschnitts	Trägheitsmoment J	Abstand e der äussersten Fasern	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$	Inhalt des Querschnitts f
12.		$0{,}5413\ r^4$	r	$0{,}5413\ r^3$	$2{,}598\ r^2$
13.		$\frac{\pi}{8} r^4 - \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{4 r}{3 \pi}\right)^2$ $= 0{,}1098\ r^4$	0,5756 r 0,4244 r	$0{,}1908\ r^3$ $0{,}2587\ r^3$	$\frac{\pi}{2} r^2$

Nr.	Schienenprofil	Höhe in cm	Gewicht pro lfd. m in kg	Trägheitsmoment J für die Horizontal-Achse	Abstand e in cm	Widerstandsmoment $W = \frac{J}{e}$	Querschnittsinhalt f in qcm
14.	Basisbreite durchgängig 91,5mm. Kopfbreite 55 mm.	13,1	32,7	919,0	6,54	140,4	42,75
		11,8	29,8	693,6	5,90	117,5	39,00
		10,5	26,1	470,3	5,23	89,8	34,20

6. Beispiele für die Berechnung der Trägheits- und Widerstandsmomente.

1. Rechteck $b = 15$, $a = 18$, um die durch b gehende Achse. $J = 29\,160$.

2. Rechteck $b = 14$, $h = 30$, um die Schwerpunktsachse $\parallel$ b, also hochkant: $J = 31\,500$, $W = 2100$.

Rechteck $b = 7$, $h = 60$, um die Schwerpunktsachse $\parallel$ b: $J = 126\,000$, $W = 4200$.*)

Ebenso ist für $b = 13$, $h = 26$ $J = 19\,041$, $W = 1465$.

3. Rechteck $b = 14$, $h = 30$, um die Schwerpunktsachse $\parallel$ h, also flachkant: $J = 6860$, $W = 980$.

Ebenso für $b = 13$, $h = 26$ $J = 4760$, $W = 732{,}3$.

4. Rechtwinkeliges Dreieck, Katheten $b = 9$ und $h = 18$, a) um die Schwerpunktsachse $\parallel$ b: $J = 1458$; b) um die Achse $\parallel$ b durch die Mitte von h: $J = 1{,}5 \,.\, 1458 = 2187$; c) um die durch b gehende Achse: $J = 3 \,.\, 1458 = 4374$; d) um die durch die Spitze $\parallel$ b gelegte Achse: $J = 9 \,.\, 1458 = 13\,122$.

5. Geviert $a = 18$, um die Schwerpunktsachse $\parallel$ a: $J = 8748$, $W = 972$.

6. Geviert $a = 18$, um die Diagonalachse: $J = 8748$, $W = 687{,}204$.

7. Wie gross ist die Seite x eines Gevierts zu nehmen, welches in der Lage von 6. ein ebenso grosses Widerstandsmoment hat wie das Geviert von der Seite a in der Lage von 5.? Antw.:

$$x = a \sqrt[6]{2}; \text{ für } a = 18 \text{ ist } x = 20{,}2.$$

8. a) In welchem Verhältniss stehen die Trägheitsmomente eines Gevierts zu demjenigen eines gleich grossen Kreisquerschnitts? b) Um wieviel Procent verringert sich das Widerstandsmoment des Querschnitts eines cylindrischen Baumstammes durch Abkanten desselben zu einem quadratischen Balken?

9. Ɪquerschnitt, Flanschenbreite $b = 10{,}6$, Flanschenstärke $t = 1{,}5$, Höhe $h = 26$, Stegdicke $d = 1{,}5$, um die Schwerpunktsachse $\parallel$ der Flansche: $J = 6298{,}825$, $W = 484{,}5$.

Dieses im Verzeichniss einer Hütte angegebene Trägerprofil hat danach $W = 476{,}725$. Dass dieser Betrag geringer ist, rührt von der Abrundung der Kanten her.

---

*) **Anm.** Von den beiden Querschnitten gleichen Inhalts ($14 \,.\, 30 = 7 \,.\, 60$) hat der höhere bedeutend grösseren Werth für J und W, woraus sich der Vortheil von höher ausgebildeten Querschnitten für Träger ergiebt.

10. Ebenso $b = 17$, $t = 2{,}5$, $h = 45$, $d = 1{,}6$. $W = 2087$, während für ein ebensolches, nur $t = 2{,}43$ haltendes Profil $W = 2054$ angegeben wird.

11. Kreisring, äusserer Durchmesser 15, Wandstärke 1,5.

$$J = 1466{,}43, \quad W = 195{,}5.$$

Angegeben findet sich $J = 1467$ und $W = 196$.

12. Querschnitt Nr. 10. der Tafel V., $h = 20$, $d = 14$, $b = 2$. $J = 2808{,}785$, $W = 280{,}88$.

13. ⊥ querschnitt, Flanschenbreite $b = 12$, Flanschenstärke $t = 3$, Höhe $h = 24$, Stegdicke $d = 2$. Zur Ermittelung des Schwerpunkts hat man:

Fig. 27.

$$78 \,.\, x = 42 \,.\, 10{,}5 + 36 \,.\, 22{,}5; \text{ daraus } x = 16{,}04$$

und $$78 \,.\, y = 42 \,.\, 13{,}5 + 36 \,.\, 1{,}5; \text{ daraus } y = 7{,}96.$$

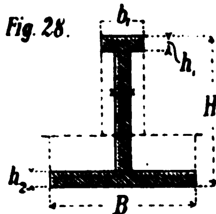
Werden diese Abstände rund $= 16$ und 8 gerechnet, so wird

$$J = \frac{1}{3}(2 \,.\, 16^3 + 12 \,.\, 8^3 - 10 \,.\, 5^3) = 4362.$$

Das Widerstandsmoment dieses Querschnitts ist nun verschieden, je nachdem dasselbe für die untersten oder die obersten Querschnittstheile berechnet wird.

$$W = J : y = 545{,}25 \text{ und } W_1 = J : x = 272{,}625.$$

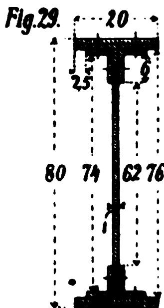
14. Für den ⊥ querschnitt $b = 19{,}2$, $t = 3$, $h = 27$, $d = 3$ findet sich angegeben $W = 518$. Prüfe die Richtigkeit dieser Angabe.



15. Für nebenstehendes Profil ist gegeben: $B = 20$, $H = 24$, $b_1 = 4$, $h_1 = 2$, $h_2 = 2$, $b = 2$. Man findet in derselben Weise wie oben $x = 16$, $y = 8$, und

$$J = \frac{1}{3}(20 \,.\, 8^3 - 18 \,.\, 6^3 + 4 \,.\, 16^3 - 2 \,.\, 14^3) = 5749,$$

woraus $W_1 = 359{,}3$; angegeben ist 359.



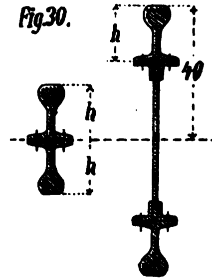
16. Für dasselbe Profil sei $B = 21$, $H = 30$, $b_1 = 6$, $h_1 = 6$, $h_2 = 6$ und $b = 3$. Wie gross ist J und W_1?

17. Für nebenstehendes Profil eines Blechträgers (Fig. 29) sind die Werthe von J und W zu berechnen.

$$J = \frac{1}{12}(20 \,.\, 80^3 - 5 \,.\, 76^3 - 12 \,.\, 74^3 - 2 \,.\, 62^3) = 225\,481{,}3$$

und $W = 5637$.

18. Berechne J und W für das Profil der gekuppelten Schienen (h = 13,1), sowie der durch Blechwand verbundenen Schienen (h = 10,5).



Man findet z. B., mit Hilfe der Angaben in Tafel V. Nr. 14., für die Schiene h = 13,1:

$$J = (919 + 42,75 \,.\, 6^2,54) \,.\, 2 = 5495 \text{ und}$$
$$W \backsim 420.$$

19. Leite für das Trapez aus den Grundlinien a, b und der Höhe h das Trägheitsmoment J für die Schwerpunktsachse ab!

Hierzu bestimme zunächst $J_a = \frac{1}{12} h^3 (a + 3\,b)$ durch Zerlegung in Dreiecke, auf welche man die Formeln S. 34 anwendet. Daraus ergiebt sich dann, mit Hilfe von dem Abstand e der Schwerpunktsachse und der Grundlinie a, $e = \frac{h}{3} \frac{a + 2\,b}{a + b}$,

$$J = \frac{1}{36} h^3 \frac{a^2 + 4\,a\,b + b^2}{a + b}.$$

20. Berechne W für den Schienenquerschnitt (Nr. 14. der Tafel V.) wenn gegeben sind: ab = 1,3 cm, bc = 1,3 cm, cd = 5,3 cm, dd_1 = 3,2 cm und ef = 2,1 cm; ferner die untere Breite des Fusses = 9,2 cm und die obere des Kopfes = 5,5 cm.

7. **Ermittelung des gefährlichen Querschnitts und des grössten Biegungsmomentes M_{max}.** Für den gefährlichen Querschnitt ist, wie oben ausgeführt wurde,

$$M_{max} = k \,.\, \frac{J}{e}.$$

Ist derselbe danach eingerichtet, dann sind die anderen Querschnitte, im Fall sie ihm gleich sind, mehr als stark genug; sie können auch schwächer gemacht werden, wie unten erörtert wird.

Die Lage des gefährlichen Querschnitts und die Grösse des Maximalbiegungsmomentes hängen nun ab

1. von der Art der Unterstützung des Stabes (Trägers): ob Freiträger oder ob beiderseits aufliegend oder eingespannt etc., ob kontinuirlich über mehreren Stützen liegend etc., sowie von der Grösse der Spannweite;*)

Anmerkung: Was die Spannweite der Träger betrifft, wird gewöhnlich der Abstand der beiden Mauerkanten, überhaupt die freie Länge als Spannweite in Rechnung gezogen. Genau genommen liegt der Punkt, in welchem der gesammte Widerstand des

2. von der Grösse der Belastung und der Art, in welcher dieselbe auf den Träger einwirkt: ob und an welchen Stellen eine oder mehrere Einzellasten, oder ob eine oder mehrere gleichmässig vertheilte Lasten, und ob diese mit oder ohne Einzellasten angreifen.

Für die **praktisch wichtigsten Fälle** wird nun das **grösste Biegungsmoment** des prismatischen Trägers nach folgenden Ausführungen gefunden.

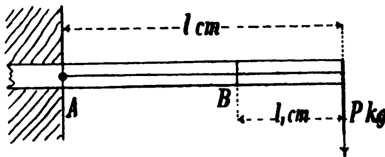
Vorbemerkung: Im folgenden werden alle lothrecht nach unten gerichteten Kräfte mit $+$, alle nach oben gerichteten mit $-$; alle von dem betreffenden Punkt nach rechts gerichteten Arme mit $+$, nach links mit $-$ in die Rechnung eingeführt. Hierdurch erhalten die rechts drehenden Momente das Plus-, die links drehenden das Minuszeichen.

I. Der Träger ist an einem Ende eingespannt, am andern frei.

a) Die Last P liegt am freien Ende. Für einen beliebigen Querschnitt B ist das statische Moment der Last P

$$M_B = (P\,l_1) \text{ kg cm.}$$

Fig. 31.

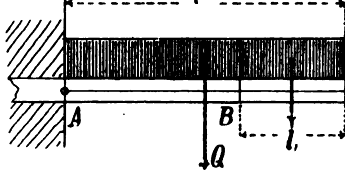


Je näher der Querschnitt der Einspannungsstelle A liegt, um so grösser wird dieses Moment. Für A selbst ist daher das Moment am grössten:

$$M_{max} = P\,l.$$

b) Die Last Q ist gleichmässig über die ganze freie Länge des Trägers vertheilt. Für B kommt zur Wirkung nur $\frac{Q}{l} \cdot l_1$ und zwar (im Schwerpunkt vereinigt) an dem Arm $\frac{l_1}{2}$, mithin ist das statische Moment für B $= \frac{Q\,l_1^2}{2\,l}$. Wird $l_1 = l$, also für A, so erhält das Moment offenbar seinen grössten Werth $\frac{Q\,l^2}{2\,l} = Q \cdot \frac{l}{2}$.

Fig. 32.



$$M_{max} = Q\,\frac{l}{2}.$$

Auflagers vereinigt zu denken ist, etwas von der Kante entfernt, so dass bei Berechnung des Biegungsmomentes die Spannweite etwas grösser anzunehmen wäre. Indessen wird auch auf die gewöhnliche Weise ausreichende Sicherheit erreicht, weshalb im folgenden stets die freie Länge als Spannweite angenommen ist.

c) Eine Einzellast P liegt am Ende und eine Last Q ist gleichässig vertheilt. Für A ist das iegungsmoment nach dem obigen m grössten, nämlich

Fig. 33

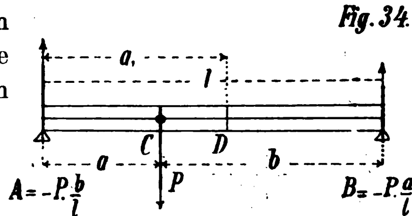
$$M_{max} = P\,l + Q\,\frac{l}{2}.$$

Beispiel: Ein 1,2 m aus der lauer vorspringender Erkerträger at gleichmässig vertheilt 200 kg und am Ende 1800 kg aufzunehen. Dann ist $M = 1800 . 120 + 200 . 60 = 228\,000$ kg cm.

II. **Der Träger liegt an beiden Enden frei auf Stützen.**

a) Die Last P liegt in einem Punkte, der von den ltützen die Abstände a und b hat.

Die durch die Last in A und 3 hervorgebrachten Drücke, denen lie Widerstände der Stützen, die leaktionen, gleich sind, ergeben ich nach früherem wie folgt:



$$\text{Reaktion } A = -\frac{P\,b}{l};$$

$$\text{Reaktion } B = -\frac{P\,a}{l}.$$

Für einen beliebigen Querschnitt D im Abstand a_1 von A ist un das statische Moment (beachte die Vorbemerkung auf S. 42!), uf der linken Seite gerechnet,

$$M_D = +\frac{P\,b}{l}\,.\,a_1 - P\,(a_1 - a) = \frac{P}{l}\left[l\,a - \underbrace{(l - b)}_{a}\,a_1\right] = \frac{P\,(l - a_1)}{l}\,.\,a.$$

Für den Belastungspunkt C ist dagegen das statische Moment

$$M_C = \frac{P\,b}{l}\,.\,a,$$

md da $l - a_1 < b$, so ist $M_D < M_C$.

Hiernach ist für den Belastungspunkt C das Biegungsmoment m grössten:

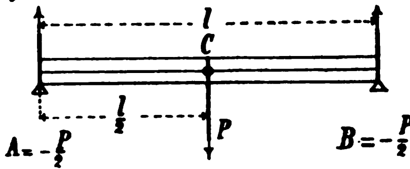
$$M_{max} = \frac{P\,a\,b}{l}.$$

Berechne die Momente für einen Punkt zwischen A und C und für C selbst on der rechten Seite, unter Berücksichtigung der Drehungsrichtung! Man erhält ir denselben Punkt links und rechts gleiche, aber entgegengesetzte Werthe.

b) Die Last P liegt in der Mitte des Trägers.

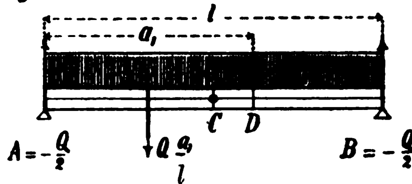
Da hier $a = b = \frac{l}{2}$ ist, so wird für den mittelsten Querschnitt siehe Fig. 35. auf der folgenden Seite)

$$M_{max} = \frac{P\,\frac{l}{2}\,.\,\frac{l}{2}}{l} = P\,\frac{l}{4}.$$



Anmerkung. Die von P hervorgebrachte Wirkung kann ebenso gut dadurch entstanden gedacht werden, dass der Träger z. B. in B und C festgehalten und die Stütze A nach oben bewegt wird. Da solches dann mit der Kraft $\frac{P}{2}$ am Arm $\frac{l}{2}$ geschehen würde, so wäre das statische Moment $\frac{P}{2} \cdot \frac{l}{2} = P\frac{l}{4} \cdot$ Ebenso lässt sich die Bildung des Maximalmoments für a) veranschaulichend erklären.

Beispiel: Ein an den Enden aufliegender Träger, freie Länge = 7 m, trägt a) in einem Punkt, der 4 m und 3 m entfernt ist, b) in der Mitte 8,4 t. Dann ist M_{max} für a) = 1 440 000 kg cm, für b) = 1 470 000 kg cm.



c) Die Last Q ist gleichmässig über die ganze freie Länge vertheilt.

Die Reaktionen sind

$$A = B = -\frac{Q}{2} \cdot$$

Für einen beliebigen Querschnitt D ist (links gerechnet)

$$M_D = \frac{Q}{2} \cdot a_1 - \frac{Q\,a_1}{l} \cdot \frac{a_1}{2} = \frac{Q}{2\,l} \cdot a_1 \cdot (l - a_1).$$

Dagegen für die Mitte C ist

$$M_C = \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{Q}{2\,l} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot$$

Da das Produkt aus den beiden ungleichen Theilen von l, nämlich aus a_1 und $l - a_1$ stets kleiner sein muss als das Produkt aus den gleichen Theilen $\frac{l}{2}$ und $\frac{l}{2}$, also $a_1 \cdot (l - a_1) < \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2}$, so ist $M_D < M_C$, und für die Mitte C ist das Biegungsmoment am grössten:

$$M_{max} = Q\,\frac{l}{8} \cdot$$

d) Eine Einzellast P liegt in der Mitte und eine Last Q ist gleichmässig vertheilt.

Nach b) und c) ist das grösste Biegungsmoment für die Mitte

$$M_{max} = P\,\frac{l}{4} + Q\,\frac{l}{8} \cdot$$

Beispiel. Eine schmiedeeiserne liegende Welle, deren Lager 3 m entfernt sind, d = 12 cm, trägt in der Mitte ein 600 kg schweres Rad. Dann ist ihr Gewicht ∾ 529 kg und für die Mitte

$$M_{max} = 600 \,.\, 150 + 529 \,.\, 75 = 129\,675 \text{ kg cm}.$$

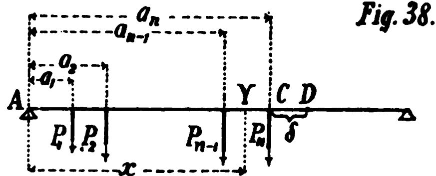
e) Eine Einzellast P liegt in einem Punkt C, der die Abstände a und b von den Stützen hat, und eine Last Q = q l ist gleichmässig vertheilt.

Wenn Q gegen P klein ist (wie meistens das Eigengewicht des Trägers gegen die Einzellast), so liegt der gefährliche Querschnitt in C. Andernfalls zwischen C und der Trägermitte. Um dies zu entscheiden, verfährt man nach folgendem wichtigen

Gesetz: Das Biegungsmoment erreicht den grössten Werth für denjenigen Querschnitt, für den die algebraische Summe der Transversalkräfte, von einer Stütze aus gerechnet, das Vorzeichen wechselt.*)

---

*) **Beweis des Gesetzes** (nach Schlotke). Zuerst wird gezeigt, dass wenn $A > P_1 + P_2 + \ldots + P_{n-1}$ ist, das Biegungsmoment für die Querschnitte zwischen P_{n-1} und P_n mit der Entfernung von A wächst. Für den Querschnitt Y im Abstand x von A ist nämlich



$$M_Y = A\,x - P_1\,(x - a_1) - P_2\,(x - a_2) - \ldots - P_{n-1}\,(x - a_{n-1})$$
$$= P_1\,a_1 + P_2\,a_2 + \ldots + P_{n-1}\,a_{n-1} + (A - P_1 - P_2 - \ldots - P_{n-1})\,x,$$

so dass also für ein grösseres x unter obiger Voraussetzung der letzte Summand und damit der ganze Werth von M_Y grösser wird.

Das Moment für C selbst ist nun, da P_n hier noch nicht auf Biegung mitwirkt,

$$M_C = P_1\,a_1 + P_2\,a_2 + \ldots + P_{n-1}\,a_{n-1} + (A - P_1 - P_2 - \ldots - P_{n-1})\,a_n.$$

Lässt man a_n noch um eine kleine Strecke CD = δ wachsen, so wird für D

$$M_D = P_1\,a_1 + P_2\,a_2 + \ldots + P_{n-1}\,a_{n-1} + (A - P_1 - P_2 - \ldots - P_{n-1})\,(a_n + \delta) - P_n\,\delta$$
$$= P_1\,a_1 + P_2\,a_2 + \ldots + P_{n-1}\,a_{n-1} + (A - P_1 - P_2 - \ldots - P_{n-1})\,a_n + (A - P_1 - P_2 - \ldots - P_n)\,\delta$$

oder $M_D = M_C + (A - P_1 - P_2 - \ldots - P_n)\,\delta.$

Ob das Biegungsmoment beim Uebergang von C nach D zu- oder abgenommen hat, hängt hiernach vom Vorzeichen der algebraischen

Transversalkräfte sind alle diejenigen, welche, wie auch die Reaktionen, senkrecht zum Träger wirken.

Man bildet hiernach, z. B. von A ausgehend, unmittelbar vor C und hinter C die algebraische Summe der Transversalkräfte. Erhält man entgegengesetzte Vorzeichen, so ist in C das grösste Biegungsmoment, der gefährliche Querschnitt. Wo nicht, so hat man den Querschnitt D im Abstand x m so zu bestimmen, dass für ihn die algebraische Summe der Transversalkräfte gleich Null ist. Beträgt die gleichmässige Belastung pro lfd. m q kg, so ist für unsern Fall x aus der Gleichung zu bestimmen:

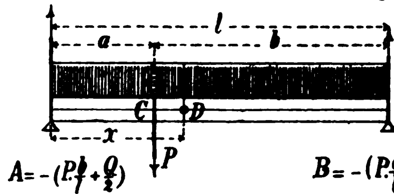


Fig. 37.

$$-\left(\frac{P\,b}{l}+\frac{Q}{2}\right)+P+q\,x=0,$$

und für D ist nach Bestimmung von x

$$M_{max}=\left(\frac{Pb}{l}+\frac{Q}{2}\right).x-P(x-a)-q\,x.\frac{x}{2}=P\,a+\frac{Qx}{2}-\frac{P\,a\,x}{l}-q\frac{x^2}{2};$$

$$M_{max}=P\,a-\frac{P\,a\,x}{l}+\frac{q\,x}{2}(l-x).$$

Drücke ebenso das Biegungsmoment für D von der andern Seite aus! Dasselbe wird an Grösse dem obigen gleich, nur mit entgegengesetzten Vorzeichen, nämlich: $-P\,a-\frac{Q\,x}{2}+\frac{P\,a\,x}{l}+q\frac{x^2}{2}$.

Beispiele. 1. Die Welle vom vorigen Beispiel trägt das Rad in einem Punkt, der 2 m vom Lager entfernt ist. Dann ist A = — 665, die Transversalkraft kurz vor dem Punkt = — 665 + 176,3, also negativ, dagegen kurz hinter dem Punkt = — 665 + 176,3 + 600, also positiv. Folglich ändert die Kraft in

---

Summe ($A-P_1-P_2-..-P_n$) ab. Ist $A > P_1+P_2+..+P_n$, so ist $M_D > M_C$ d. h. das grösste Biegungsmoment liegt noch weiter als D. Ist dagegen $A < P_1+P_2+...+P_n$, so ist $M_D < M_C$, und in C ist dann das grösste Biegungsmoment, also da, wo die algebraische Summe der Transversalkräfte das Vorzeichen wechselt.

Dieser Beweis gilt ebenso für gleichmässige Belastung, insofern eine solche als aus unendlich vielen Einzelkräften bestehend zu denken ist. Hierbei wird dann der Fall eintreten können, dass die algebraische Summe der Transversalkräfte an einem Punkte des Trägers gleich Null wird.

dem Punkt selbst das Vorzeichen und hier ist der gefährliche Querschnitt. $M_{max} = 665 . 200 — 176{,}3 . 100 = 115\,370.$

Rechts gerechnet, erhielte man

$$M_{max} = — 465 . 400 + 352{,}6 . 200 = — 115\,480.$$

Der verhältnissmässig geringe Unterschied rührt von der Abkürzung der Decimalbrüche her.

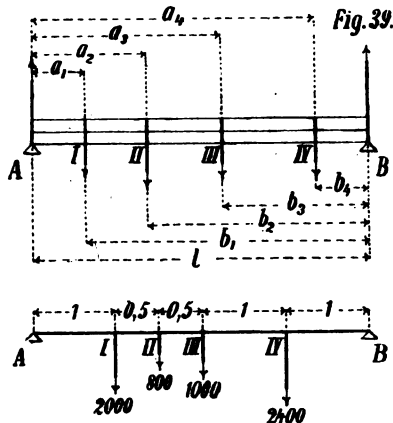
2. Ein auf Stützen 5 m freiliegender Balken hat pro lfd. m 600 kg und 1 m von A entfernt die Einzellast P = 800 kg zu tragen. Dann ist A = — 2140. Die Transversalkraft kurz vor der Einzellast = — 1540, hinter derselben = — 740; also liegt der gefährliche Querschnitt weiter nach der Mitte zu.

$$0 = — 2140 + 800 + 600\,x; \text{ woraus } x = 2{,}233 \ldots m$$

und $M_{max} = 2140 . 223 — 800 . 123 — 1340 . 111{,}6 = 229\,276.$

Rechne den Ort des gefährlichen Querschnitts und M_{max} von rechts aus!

f) Mehrere Einzellasten $P_1\, P_2\, P_3 \ldots$ liegen in Punkten, deren Abstände von den Stützen bez. a_1 und b_1, a_2 und $b_2 \ldots$ sind.



Nach dem obigen Gesetz (siehe bei e) muss der gefährliche Querschnitt in einem Belastungspunkt liegen, da in einem solchen jedenfalls das Vorzeichen der Transversalkraft wechselt. Nach Ermittelung der Reaktionen ergiebt sich leicht, an welcher Stelle solches geschieht, worauf man für diese Stelle das Biegungsmoment bestimmt.

Beispiele. 1. Für nebenstehenden Fall (Fig. 39.) ergiebt sich

$$A = — \frac{2000 . 3 + 800 . 2{,}5 + 1000 . 2 + 2400 . 1}{4} = — 3100$$

und B = — 3100. Die Transversalkraft ist vor II = — 1100, hinter II = — 300, vor III noch = — 300, hinter III = + 700. Folglich ist für III

$$M_{max} = 3100 . 200 — 2000 . 100 — 800 . 50 = 380\,000.$$

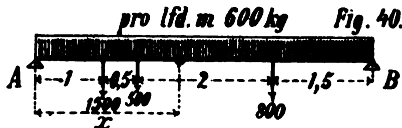
Rechne dasselbe, von rechts ausgehend, nach, wobei genau dasselbe sich ergeben muss, nämlich M = — 380 000.

2. Die Aufgabe aus Schlotke*) S. 118 a) ergiebt: A = — 4357, B = — 4143 und für den bei der Last 1500 liegenden gefährlichen Querschnitt M = 1 850 000.

g) Mehrere Einzellasten P_1 P_2 P_3 liegen wie bei f) und eine Last Q ist über die ganze Länge gleichmässig vertheilt, oder mehrere gleichmässig vertheilte Lasten Q_1 Q_2 Q_3 . . . liegen, ohne oder mit Einzellasten, über verschiedenen Theilen des Trägers.

Hierfür gilt genau dasselbe wie für e).

Beispiele.



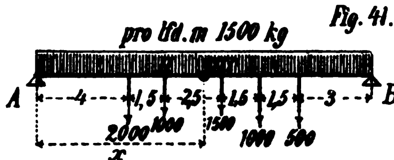
1. Für nebenstehenden Fall erhält man A = — 3290; kurz hinter II ist die Transversalkraft noch = — 390. Die Entfernung des gefährlichen Querschnitts ergiebt sich aus der Gleichung:

$$— 3290 + 1500 + 500 + 600\,x = 0; \text{ daraus } x = 2{,}15 \text{ m.}$$

Das Biegungsmoment für diesen Querschnitt rechnet sich besser rechts:

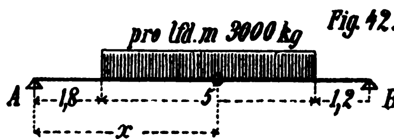
$$M_{max} = — 2510 . 285 + 800 . 135 + 1710 . 142{,}5 = — 363\,675.$$

2. Die Aufgabe aus Schlotke S. 119 d) würde folgendes ergeben:



A = — 13 607,14; B = — 13 392,86. Ferner ist, von links gerechnet, hinter II die Transversalkraft noch = — 2357,14. Der gefährliche Querschnitt zwischen II und III ergiebt sich dann: x = 7,07 m. Hierfür ist das Biegungsmoment, am besten links gerechnet:

$$M_{max} = 5\,099\,623{,}99 \text{ kg cm.}$$



3. Der 8 m lange Träger hat auf 5 m Länge die gleichmässig vertheilte Last 15 000 kg aufzunehmen. Dann erhält man A = — 6937,5. Der gefährliche Querschnitt liegt 4,1125 m von links entfernt, und es ist

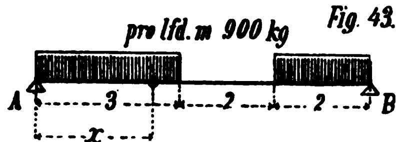
$$M_{max} = 6937{,}5 . 411{,}25 — 6937{,}5 . 115{,}625 = 2\,050\,898{,}44.$$

4. Die ähnliche Aufgabe aus Schlotke S. 119 c) ergiebt A = — 789,5; x = 79,21 cm und

$$M_{max} = 789{,}5 . 79{,}21 — 789{,}5 . 29{,}61 = 789{,}5 . 49{,}6 = 39\,159{,}2$$

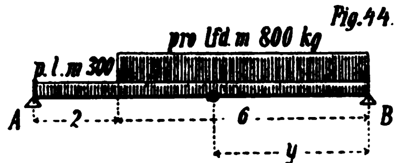
*) J. Schlotke, Lehrbuch der Graphischen Statik. Dresden, Kühtmann. 1887.

links gerechnet. — Wie gross wird M, wenn der Wasserkasten n die Mitte zu liegen kommt?



5. Für den Träger Fig. 43. rhält man A = — 2378,6 und = 2,643 m, woraus folgt:

$$M_{max} = 2378{,}6 \,.\, 264{,}3 - 2378{,}6 \,.\, 132{,}15 = 2378{,}6 \,.\, 132{,}15$$
$$= 314\,331{,}99.$$



6. Ein Träger, dessen Eigen- ewicht pro lfd. m 300 kg beträgt, st ausserdem wie nebenstehend elastet. Man findet A = — 3000, 3 = — 4200; ferner rechts 1100 . y = 4200; y = 3,818 und für diesen Punkt

$$M_{max} = -4200 \,.\, 381{,}8 + 4200 \,.\, 190{,}9 = -801\,780.$$

Rechne das Resultat von links aus, was viel weitläufiger ist!

7. Der Träger aus Beispiel 5. erhalte noch an jedem Ende der reigebliebenen Strecke die Einzellast 1400.

Dann wird A = — 3578,6 und der gefährliche Querschnitt liegt n dem Punkt, wo die linke Einzellast angreift. Hierfür ist

$$M_{max} = 3578{,}6 \,.\, 300 - 2700 \,.\, 150 = 668\,580.$$

8. Für die Aufgabe aus Schlotke S. 118 b) hat man folgendes: = — 13414, B = — 14586.

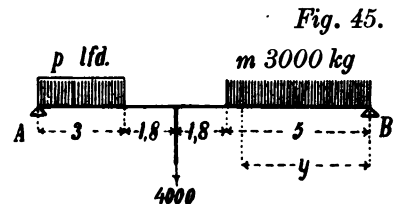


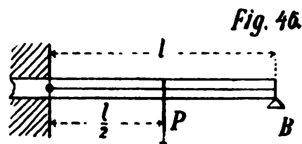
Fig. 45.

Der gefährliche Querschnitt er- iebt sich, am besten rechts, aus 3000 . y = 14586; y = 4,862 m. Dafür wird

$$M_{max} = 3\,545\,856{,}6.$$

Links gerechnet, erhält man, twas weitläufiger, eine um etwas höhere Zahl.

III. Der Träger ist an dem einen Ende eingespannt und egt am andern Ende frei auf.



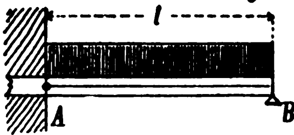
a) Eine Einzellast P liegt in er Mitte. Wie unter Berücksichtigung er elastischen Linie ermittelt werden ann, sind in diesem Falle die Reaktionen

$$A = -\frac{11}{16} P \text{ und } B = -\frac{5}{16} P.$$

ür den gefährlichen Querschnitt A ist

$$M_{max} = -\frac{5}{16} P \,.\, l + P \,.\, \frac{l}{2} = \frac{3}{16} P\, l.$$

b) Eine Last Q ist über die ganze Länge vertheilt.



Dann sind die Reaktionen

$$A = -\frac{5}{8} Q \text{ und } B = -\frac{3}{8} Q.$$

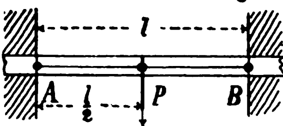
Für den gefährlichen Querschnitt A ist

$$M_{max} = -\frac{3}{8} Q \,.\, l + Q \,.\, \frac{l}{2} = \frac{1}{8} Q l.$$

Beispiel. Ein als eingespannt anzusehender Träger springt 1,5 m vor und liegt am Ende auf einer Stütze. Seine Belastung ist eine gleichmässig vertheilte, 500 kg pro lfd. m, und eine Last in der Mitte = 800 kg. Dann ist

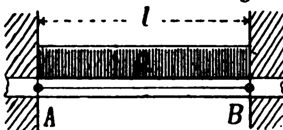
$$M_{max} = \frac{1}{8} \,.\, 750 \,.\, 150 + \frac{3}{16} \,.\, 800 \,.\, 150 = 36\,562{,}5.$$

IV. **Der Träger ist an beiden Enden eingespannt.**



a) Eine Einzellast P liegt in der Mitte. Die Reaktionen sind $A = -\frac{P}{2} = B$ und für jeden der drei gefährlichen Querschnitte ist

$$M_{max} = \frac{P}{2} \,.\, \frac{l}{4} = \frac{1}{8} P l.$$



b) Eine Last Q ist gleichmässig vertheilt. Für jeden der beiden gefährlichen Querschnitte an den Stellen der Einspannung ist

$$M_{max} = \frac{1}{12} Q l.$$

Beispiel. Ein 18 m langer Träger liegt mit beiden Enden und ausserdem in zwei Punkten, deren jeder vom Ende 5 m entfernt ist, auf. Eine gleichmässig vertheilte Last beträgt 1800 kg pro lfd. m. Ausserdem liegt in der Mitte die Einzellast P = 5000. Dann ist das mittlere Feld im Falle von IV a) und b).

$$M_{max} = \frac{1}{12} \,.\, 14\,400 \,.\, 800 + \frac{1}{8} \,.\, 5000 \,.\, 800 = 1\,460\,000.$$

Für jedes der beiden Seitenfelder, welches sich im Falle von III b) befindet, ist $M_{max} = \frac{1}{8} \,.\, 9000 \,.\, 500 = 562\,500$, woraus sich ergiebt, dass der Träger hier weit schwächer sein könnte und dass es deshalb, wie auch aus anderen Gründen zweckmässiger ist, einen solchen langen Träger aus drei einzelnen, über den Stützen gestossenen Theilen zu konstruiren.

Die vorstehende Berechnung des kontinuirlichen Trägers ist eine nur ungefähre.

8. Tafel VI. über grösstes Biegungsmoment, Widerstandsmoment, Tragkraft, Reaktionen etc.

r.	Angriffsweise.	M_{max}	W	P bezw. Q	Reaktionen	Gefährl. Querschnitt
.	l, P	$P\,l$	$\frac{P\,l}{k}$	$P = \frac{k\,W}{l}$	$A = -P$	A
.	l	$Q\,\frac{l}{2}$	$\frac{Q\,l}{2\,k}$	$Q = 2\,\frac{k\,W}{l}$	$A = -Q$	A
.	l, $\frac{l}{2}$, P	$P\,\frac{l}{4}$	$\frac{P\,l}{4\,k}$	$P = 4\,\frac{k\,W}{l}$	$A = B = -\frac{P}{2}$	C
:.	l, a, b, P	$P\,\frac{a\,b}{l}$	$\frac{P\,a\,b}{l\,k}$	$P = \frac{l}{a\,b}\,k\,W$	$A = -P\,\frac{b}{l}$ $B = -P\,\frac{a}{l}$	C
i.	l	$Q\,\frac{l}{8}$	$\frac{Q\,l}{8\,k}$	$Q = 8\,\frac{k\,W}{l}$	$A = B = -\frac{Q}{2}$	C
}.	l, $\frac{l}{2}$, P	$P\,\frac{3}{16}\,l$	$\frac{P\,3\,l}{16\,k}$	$P = \frac{16}{3}\,\frac{k\,W}{l}$	$A = -\frac{11}{16}\,P$ $B = -\frac{5}{16}\,P$	A
[.	l	$Q\,\frac{l}{8}$	$\frac{Q\,l}{8\,k}$	$Q = 8\,\frac{k\,W}{l}$	$A = -\frac{5}{8}\,Q$ $B = -\frac{3}{8}\,Q$	A
}.	l, $\frac{l}{2}$, P	$P\,\frac{l}{8}$	$\frac{P\,l}{8\,k}$	$P = 8\,\frac{k\,W}{l}$	$A = B = -\frac{P}{2}$	A B C
).	l	$Q\,\frac{l}{12}$	$\frac{Q\,l}{12\,k}$	$Q = 12\,\frac{k\,W}{l}$	$A = B = -\frac{Q}{2}$	A, B

9. Die Durchbiegung belasteter Träger, welche sich aus der Lehre von der elastischen Linie ergiebt, wird hier für die wichtigsten Fälle ohne Entwickelung angegeben.

Die Grössen, von denen dieselbe abhängig ist, sind offenbar die freie Länge l, ferner Grösse, Ort und Art der Belastung (P oder Q), sowie Grösse, Form und Lage des Querschnitts, was sich im Trägheitsmoment J ausspricht, und die Elasticität des Materials, ausgedrückt durch E.

1. Der Träger ist wagerecht einerseits eingespannt, Ende durch P belastet. Die Durchbiegung des freien Endes ist

$$s = \frac{P\,l^3}{3\,E\,J}.$$

2. Der Träger ist wagerecht einerseits eingespannt, gleichmässig durch Q belastet. Die Durchbiegung des freien Endes ist

$$s = \frac{Q\,l^3}{8\,E\,J}.$$

3. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf Stützen und ist durch P in einem Punkte belastet, der von den Stützen die Abstände a und b hat. Die Durchbiegung an der Stelle der Last ist

$$s = \frac{P\,a^2\,b^2}{3\,E\,J\,l}.$$

4. Der Träger ist in der Mitte belastet, sonst wie bei 3.

$$s = \frac{P\,l^3}{48\,E\,J}.$$

5. Der Träger liegt an beiden Enden frei auf und ist gleichmässig durch Q belastet. Dann ist für die Mitte:

$$s = \frac{5}{8}\,\frac{Q\,l^3}{48\,E\,J}.$$

6. Der Träger ist einerseits eingespannt und liegt andererseits frei auf, Last Q gleichmässig vertheilt. Dann ist für die Mitte

$$s = \frac{1}{4}\,\frac{Q\,l^3}{48\,E\,J}.$$

7. Der Träger ist beiderseits eingespannt und gleichmässig durch Q belastet. Dann ist für die Mitte:

$$s = \frac{1}{8}\,\frac{Q\,l^3}{48\,E\,J}.$$

Anmerkung. Mit Hilfe einer dieser Gleichungen lässt sich, wi leicht zu ersehen, der Elasticitätsmodul E für die verschiedene Materialien bestimmen, nämlich durch genaue Messung der Durch biegung eines gegebenen Stabes bei gegebener Belastung etc.

Beispiel: Eine Eisenstange, rechteckig 50/20 mm, wird wage recht flachkant auf zwei 1 m entfernte Stützen aufgelegt und in de

Mitte durch 500 kg belastet. Die beobachtete Einsenkung ist 13 mm. Wie gross ist E für das betreffende Stabeisen?

$$E = \frac{P \,.\, l^3}{48 \,.\, s \,.\, J} = \frac{500 \,.\, 1000 \,.\, 1000 \,.\, 1000}{48 \,.\, 13 \,.\, \frac{1}{12} \,.\, 50 \,.\, 20 \,.\, 20 \,.\, 20} \backsim 24\,040 \text{ kg pro qmm.}$$

Berechne, um wieviel das Resultat sich ändert, wenn das Eigengewicht des Stabes berücksichtigt wird!

10. Abhängigkeit der Querschnittsform vom Material des Trägers; Querschnitte gleicher Festigkeit.

Für die Hauptgleichung der Biegungsfestigkeit $M = k \,.\, W$ oder

$$M = k \,.\, \frac{J}{e}$$

ist im vorhergehenden die Bestimmung von J bei gegebenem Trägerquerschnitt, und von M bei gegebener Art der Belastung etc. durchgeführt worden.

Was nun die im Einzelfalle einzusetzenden Werthe von k und e betrifft, so sind dieselben nach der oben gegebenen Ableitung von einander abhängig: Wenn e den Abstand der äussersten Fasern auf der gezogenen Seite des Querschnitts bedeutet, so ist k die zulässige Zugspannung des betreffenden Materials pro qcm. Rechnet man dagegen mit dem Abstand e_1 der äussersten Fasern auf der gedrückten Seite (Abstand jedesmal von der horizontalen Schwerpunktsachse), so ist der Sicherheitsmodul k_1 für Druckfestigkeit einzusetzen. Sollen, wie ferner vorausgesetzt wurde, sowohl die obersten als auch die untersten Fasern gerade so stark beansprucht werden, als zulässig ist, so muss $\frac{k}{e} = \frac{k_1}{e_1}$ werden.

Liegt nun ein Material vor, welches gegen Zug wie Druck gleichen Widerstand bietet, wie Schmiedeeisen, Stahl und annähernd Holz, und ist also $k = k_1$, so muss auch $e = e_1$ werden, d. h. die Schwerpunktsachse geht durch die Mitte der Höhe: der Querschnitt ist gegen die wagerechte Mittenachse symmetrisch. Würde bei einem dieser Materialien solches nicht der Fall sein, wie z. B. beim gewalzten Träger von der T Form, so würden die äussersten Fasern der Flanschenseite, weil sie der Drehachse näher liegen, nicht so stark beansprucht werden als die weiter entfernten auf der andern Seite. Da letztere aber höchstens pro qcm mit 700 kg in Anspruch zu nehmen sind und danach die Grösse des Querschnitts eingerichtet ist, so würden die ersteren weniger zu leisten haben als sie leisten können. Das wäre also Materialverschwendung.

Bei **Walzeisen** und auch bei **Holz** ist hiernach ein symmetrischer Querschnitt am vortheilhaftesten. Sind dabei die Zahlen für k und k_1 etwas verschieden wie bei Holz, so ist die kleinere von beiden zu wählen.

Umgekehrt liegt die Sache bei **Gusseisen**, welches bekanntlich eine etwa doppelt so grosse Druck- als Zugfestigkeit besitzt, nämlich $k_1 = 500$ und $k = 250$. Würde man hier den symmetrischen Querschnitt anwenden und selbstverständlich dafür sorgen, dass die äussersten gezogenen Fasern höchstens den Widerstand von 250 kg pro qcm zu leisten haben, so würden wegen des gleichen Abstandes auch die gedrückten Fasern nur mit 250 kg pro qcm in Anspruch genommen werden, so dass die Hälfte ihrer Widerstandsfähigkeit brach läge. Daher ist der Querschnitt für Gusseisen so einzurichten, dass von den äussersten gezogenen Fasern pro qcm auch nur halb so viel Widerstand verlangt wird, als von den äussersten gedrückten. Solches ist aber dann der Fall, wenn ihr Abstand von der Drehachse halb so gross ist als derjenige der gedrückten Fasern von derselben.

Daraus ergiebt sich dann als die vortheilhafteste Form für gusseiserne Träger die einfache ⊤ Form, bei welcher am andern Ende auch eine kleine Flansche angeordnet sein kann. Und zwar ist der Querschnitt in seinen Grössenverhältnissen so einzurichten, dass die Schwerpunktsachse die Höhe im Verhältniss 2 : 1 theilt. Dann ist $e = \frac{1}{2} e_1$, und da $k = \frac{1}{2} k_1$ ist, so wird

$$\frac{k}{e} = \frac{\frac{1}{2} k_1}{\frac{1}{2} e_1} = \frac{k_1}{e_1}$$

und

$$k_1 \cdot \frac{J}{e_1} = k \cdot \frac{J}{e} = M.$$

Ist ein Gusseisen-Querschnitt nicht in dieser vortheilhaftesten Art eingerichtet und werden die beiden Abstände wie oben mit e_1 und e bezeichnet, so ist hier $\frac{k_1}{e_1}$ nicht $= \frac{k}{e}$, und man muss bei der Ermittelung der Grösse des Biegungsmoments, welchem der betreffende Querschnitt gewachsen ist, den kleineren von beiden Werthen in Rechnung bringen.

Solche Querschnitte für Gusseisen, bei welchen der Schwerpunkt auf $\frac{1}{3}$ der Höhe liegt, heissen **Querschnitte gleicher Festigkeit** für Gusseisen. Eine grosse Zahl von Profilen dieser Art sind in Hüttenverzeichnissen aufgeführt; oben (unter 6.) sind für einige von diesen die Trägheitsmomente ausgerechnet worden.

Bei einem Träger, welcher kontinuirlich über eine oder mehrere Stützen hinweggeht, liegt die konvexe Seite der von ihm angenommenen elastischen Linie abwechselnd oben und unten, so dass die gezogenen Fasern an verschiedenen Stellen oben und unten liegen. Daraus ergiebt sich, dass in solchem Falle ein gusseiserner Träger von T Querschnitt niemals Verwendung finden darf.

11. Träger von gleichem Widerstand. Wie oben (unter 7.) ausgeführt, haben alle anderen Querschnitte, ausser dem gefährlichen, kleineren Biegungsmomenten Widerstand zu leisten, können deshalb auch schwächer genommen werden als jener; im allgemeinen ist an jeder Stelle des Trägers ein anderer Querschnitt erforderlich. In den meisten Fällen gebieten die praktischen Verhältnisse einen überall gleichen Querschnitt (z. B. bei den gewalzten Trägern die Art der Herstellung, bei den Hölzern der vergleichsweise geringe Werth des Materials etc.). Allein sehr oft kann doch von diesem Umstande Nutzen gezogen werden. Solche Träger, welche an jeder Stelle nur so stark sind, dass sie den äusseren Kräften den nöthigen Widerstand entgegensetzen können, heissen Träger von gleichem Widerstand.

Die Formen, welche sich nun für solche von **rechteckigem** Querschnitt ergeben, sind für die einfachsten Fälle in folgendem abgeleitet:

I. Der Träger ist einerseits eingespannt, Ende belastet.

Für A ist

$$M_{max} = P\,l = k\,.\,\frac{1}{6}\,b\,h^2,$$

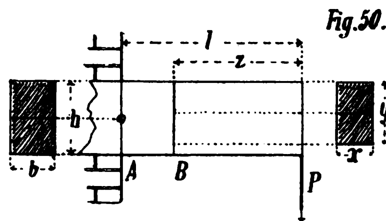


Fig. 50.

woraus die erforderlichen Abmessungen b und h an der Stelle der Einspannung ermittelt werden konnten.

Für B (im Abstand z vom freien Ende) ist

$$P\,z = k\,.\,\frac{1}{6}\,x\,y^2,$$

falls die für B nöthigen Abmessungen x und y sein mögen. Hiernach ist

$$x\,y^2 : b\,h^2 = z : l.$$

Nun wird man aus praktischen Gründen nicht gern beide Abmessungen nach der Spitze hin abnehmen lassen; vielmehr nur bei gleichbleibender Breite b die Höhe, oder bei gleichbleibender Höhe h die Breite.

Für den ersteren Fall ist $x_1 = b$ zu setzen, wodurch man erhält $y_1^2 : h^2 = z : l$

$$y_1^2 = \frac{h^2}{l} \cdot z \ldots \text{(Gleichung einer Parabel)}$$

$$y_1 : h = \sqrt{z} : \sqrt{l}.$$

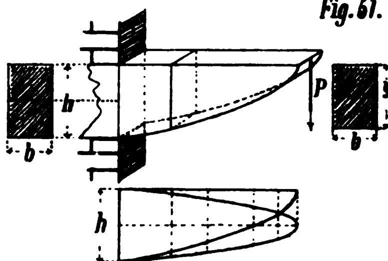


Fig. 51.

In den Abständen

$$\frac{1}{16}l, \frac{1}{9}l, \frac{1}{4}l, \frac{1}{3}l, \frac{1}{2}l, \frac{9}{16}l$$

vom freien Ende sind die erforderlichen Höhen hiernach

$$\frac{1}{4}h, \frac{1}{3}h, \frac{1}{2}h, \sim\frac{100}{173}h, \sim\frac{5}{7}h, \frac{3}{4}h.$$

Trage dieselben ab und konstruire so die krumme Begrenzungslinie des Aufrisses. (Siehe Fig. 51.)

Für den letzteren Fall ist $y_2 = h$, also $y_2^2 = h^2$ zu setzen.

Fig. 52.

Man erhält

$$x_2 : b = z : l$$

$$x_2 = \frac{b}{l} \cdot z \ldots \text{(Gleichung einer Geraden).}$$

In den obigen Abständen wird nun die Breite

$$\frac{1}{16}b, \frac{1}{9}b, \frac{1}{4}b, \frac{1}{3}b, \frac{1}{2}b, \frac{9}{16}b.$$

Durch Abtragen konstruire den Grundriss in Form eines Dreiecks wie es Fig. 52. zeigt.

Im gleichen Abstand z vom freien Ende leisten die beide Querschnitte aus b und y_1, wie aus x_2 und h gleichen Widerstand Warum ist der letztere von kleinerem Inhalt?

Beispiel. Ein 1,2 m ausladender rechteckiger Sandsteinträge der im wesentlichen am Ende belastet anzunehmen ist, hat an de Mauer 25 cm Breite und 60 cm Höhe anzunehmen. Welche Höh muss er bei gleicher Breite mindestens haben in Abständen 30, 60 90, 100 cm von der Mauer entfernt? — In 30 cm Abstand wir $y_1 = 60 \cdot \sqrt{0,75} = 51,96$ cm etc.

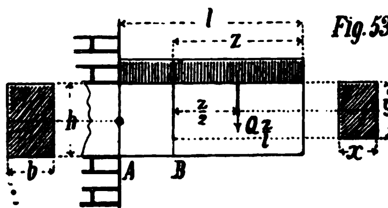


Fig. 53.

II. Der Träger ist einerseits eingespannt und gleichmässig belastet.

Für A ist $Q \cdot \frac{l}{2} = k \cdot \frac{1}{6} b h^2$;

für B ist $\frac{Q z}{l} \cdot \frac{z}{2} = k \cdot \frac{1}{6} x y^2$.

Daraus ergiebt sich

$$x y^2 : b h^2 = z^2 : l^2.$$

Für gleichbleibende Breite ($x_1 = b$) wird nun

$$y_1{}^2 : h^2 = z^2 : l^2,$$

woraus

$$y_1 : h = z : l;$$

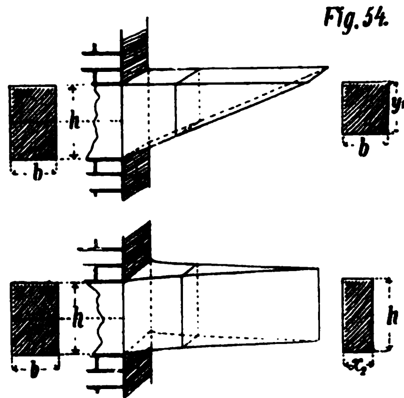
$$y_1 = \frac{h}{l} z \ldots \text{(Gleichung einer Geraden).}$$

Für gleichbleibende Höhe ($y_2 = h$) wird

$$x_2 : b = z^2 : l^2$$

$$z^2 = \frac{l^2}{b} . x_2 \ldots \text{(Gleichung einer Parabel).}$$

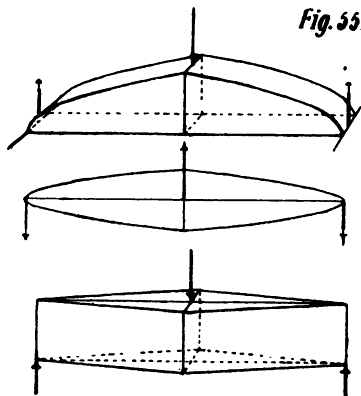
Man erhält hiernach entweder: bei rechteckigem Grundriss ein Dreieck als Aufriss, oder: bei rechteckigem Aufriss einen von einem Parabel- oder wie in der Figur von zwei Parabelbögen begrenzten Grundriss. (Siehe Fig. 54.)



Beispiel. Ein 60 cm ausladender gleichmässig belasteter Träger (Gusseisen) erhält an der Stelle der Einspannung 20 cm und 30 cm zur Breite und Höhe. Welche Breiten hat er anzunehmen in den Abständen 15, 20, 30, 45, 55 cm von der Wand? — In 50 cm Abstand wird $x_2 = 20 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 \backsim 0{,}56$ cm.

III. Der Träger liegt an beiden Enden auf und ist in der Mitte belastet.

Nach früherem sind für die Mitte, wo das Biegungsmoment am grössten, die erforderlichen Abmessungen zu ermitteln. Nach beiden Enden werden die Biegungsmomente immer kleiner, so dass beiderseits eine gleichmässige Verjüngung eintreten kann. Jede Hälfte befindet sich nun offenbar im Fall I. Daher gilt dafür auch das dort Vorgetragene.



Aus den Figuren ist das weitere leicht ersichtlich.

Das Gleiche gilt auch für den Fall, dass die beiden End belastet und die Mitte unterstützt ist. Deshalb findet n u. a. bei Balanciers die obenstehende Form (Fig. 55) angewenc

IV. Der Träger liegt an beiden Enden auf und gleichmässig belastet.

Für die Mitte, wo das Biegungsmoment am grössten, ist n früherem
$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{l}{4} = k \cdot \frac{1}{6}\, b\, h^2.$$

Für einen Querschnitt im Abstand z cm vom Ende, für welc die Abmessungen x und y erforderlich sein mögen, ist dage der der Reaktion $\frac{Q}{2}$ entgegenwirkende Theil der gleichmässigen lastung $= \frac{Q \cdot z}{l}$; daher ist
$$\frac{Q}{2} \cdot z - \frac{Q\, z}{l} \cdot \frac{z}{2} = k \cdot \frac{1}{6}\, x\, y^2$$
oder
$$\frac{Q}{2} \cdot \frac{z\,(l - z)}{l} = k \cdot \frac{1}{6}\, x\, y^2$$

$$x\, y^2 : b\, h^2 = \frac{z\,(l - z)}{l} : \frac{l}{4} = z\,(l - z) : \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

Für $x_1 = b$ wird nun
$$y_1^2 : h^2 = z\,(l - z) : \left(\frac{l}{2}\right)^2$$
$$y_1^2 = \frac{4\, h^2}{l^2}\,(l\, z - z^2) \ldots \text{(Gleichung einer Ellipse)}$$
$$y_1 : h = \sqrt{z\,(l - z)} : \frac{l}{2}.$$

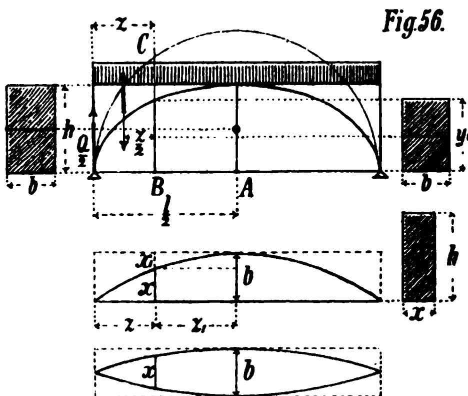


Fig. 56.

Da $\sqrt{z\,(l - z)}$ die r lere Proportionale zwisc den Abschnitten ist, welche die Länge l du den betreffenden Q schnitt getheilt wird, diese bekanntlich auf in Fig. 56 angegel Weise = B C konst werden kann, so erg sich mit Hilfe vo Stereom. S.123, dass Endpunkt der Höhe y der Ellipse liegt, welche $\frac{l}{2}$ und h zu Halbachsen hat. Das F des Trägers von gleichem Widerstand ist also für diesen Fall Ellipse.

Wird ferner die bei gleichbleibender Höhe erforderliche Breite mit x bezeichnet, so wird

$$x : b = z\,(l - z) : \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Durch Einführung von $z = \frac{l}{2} - z_1$ entsteht zunächst

$$x = \frac{4\,b}{l^2}\left(\frac{l^2}{4} - z_1{}^2\right) = b - \frac{4\,b\,z_1{}^2}{l^2},$$

woraus

$$b\,z_1{}^2 = \frac{b\,l^2}{4} - \frac{l^2}{4}\,x.$$

Wird nun in dieser Gleichung $x = b - x_1$ gesetzt, so wird endlich

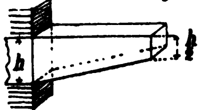
$$z_1{}^2 = \frac{l^2}{4\,b}\,x_1 \ldots$$ (Gleichung einer Parabel, deren Scheitel der Endpunkt der Breite b ist).

Der Grundriss des überall gleich hohen Trägers könnte hiernach die in Fig. 56. angegebenen Formen annehmen.

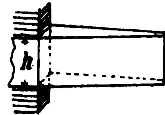
An Stelle der hier entwickelten, zum Theil schwierig zu konstruirenden oder unpraktischen Formen sind angenäherte Formen vorgeschlagen, wie sie nach Reuleaux „Der Constructeur" in Fig. 57. aufgeführt werden.

Fig. 57.

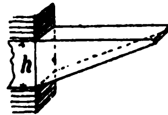
Für I. Freiträger, Ende belastet . . . . .



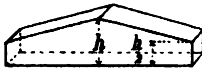
oder



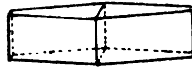
Für II. Freiträger, gleichmässig belastet



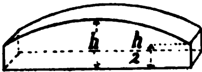
Für III. Träger, beiderseits aufliegend, Mitte belastet . . . . .



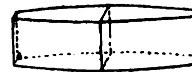
oder



Für IV. Träger, beiderseits aufliegend, gleichmässig belastet



oder



Kreisbögen. Kreisbögen.

Vorstehende Konstruktionen finden Anwendung u. a. bei ausladenden Trägern von Stein, wie Erker- und Balkonkonsolen (aus ganzen Steinen oder aufgetreppt), welche schon die Alten in richtigem Gefühl nach vorn verjüngten; ferner vielfach bei eisernen Trägern, sowohl ausladenden als beiderseits unterstützten, auch wie oben bemerkt bei den Balancierarmen. Maschinenwellen werden vom

Achsenkopf nach den Lagern hin verjüngt. Von Holzkonstruktionen ist dahin der linsenförmige Balken zu rechnen, welcher am besten aus zwei rechteckigen Balken dadurch hergestellt wird, dass dieselben an den Enden auf einander durch Bolzen stark befestigt und in ihrer sonstigen Ausdehnung durch unverrückbar eingelassene Spreizen aus einander gehalten werden. Die Krümmung, welche dabei jeder der beiden Balken annehmen muss, schwächt indessen ihre Tragfähigkeit in solchem Grade, dass diese Konstruktionen doch wenig Nutzen bringen.

Vortheilhaft sind dagegen die aus mehreren über einander liegenden Balken bestehenden Träger, wenn sie derart (durch Verzahnen oder Verdübeln) fest mit einander verbunden sind, dass das Ganze wie ein einziger Balken zu betrachten ist; bei einfachem Aufeinanderlegen würden sich die Tragfähigkeiten einfach addiren. Auch der hölzerne Gitterträger (siehe Beispiel 15. unter 12.) gehört zu dieser Art von Verbindungen.

12. Beispiele für die Berechnung der Biegungsfestigkeit.

1. Für die in den Beispielen unter 7. (Seite 43 bis 50) aufgeführten Fälle sind die erforderlichen Trägerprofile (I; $k = 700$), sowie die Auflagerplatten etc. ($k_1 = 7$) anzugeben.

2. Ein ausladender Träger, 0,9 m vorspringend, hat 1200 kg als gleichmässig vertheilte Belastung und 900 kg am Ende aufzunehmen. a) Genügt ein Sandsteinträger ($k = 20$) 28/40 cm? b) Welche Abmessungen an der Einspannungsstelle hätte ein Gusseisenträger von rechteckigem Querschnitt ($k = 250$) anzunehmen ($b : h = 1 : 2$)? c) Welches I profil, Schmiedeeisen ($k = 700$) wäre erforderlich? — Antw.: $M = 135\,000$. a) Erforderlich ist $W = 6750$; der Querschnitt hat aber $\frac{1}{6} \cdot 28 \cdot 40 \cdot 40 \backsim 7467$. b) $540 = \frac{1}{6} b \cdot (2\,b)^2$; $b = 9{,}4$, $h = 18{,}7$. c) $W = 193$ erfordert ein Profil von 8,3 zu 17,5 cm, für welches sich $W = 195{,}864$ angegeben findet.

3. Ein Eichenbalken 18/22 cm, 6,3 m freie Länge, liegt an beiden Enden auf. a) Durch welche Belastung in der Mitte würde er zerbrechen? b) Welche wird er sicher tragen? — Antw.: a) 6453; b) 645,3. Da $K = 800$, $K_1 = 700$ ist, hat man 700 zu rechnen.

4. Ein Tannenbalken 16/25 cm, 3,2 m freie Länge, liegt an beiden Enden auf und trägt die gleichmässig vertheilte Last 4000. Welche Senkung erfährt er in der Mitte? $E = 120\,000$. — Antw.: $s = \frac{256}{375} = 0{,}683$ cm.

5. Eine gusseiserne Stange, 5 cm breit und 1,3 cm hoch, liegt 1,6 m frei und wird durch 9 kg in der Mitte um 0,64 cm durchgebogen. Wie gross ist hiernach E für Gusseisen? — Antw.:

$$E = \frac{P\,l^3}{48\,s\,J} = \frac{9 \,.\, 160^3}{48 \,.\, 0{,}64 \,.\, \frac{1}{12} \,.\, 5 \,.\, 1^3{,}3} = 1\,310\,880 \text{ pro qcm.}$$

6. Fussbodenbalken von 6 m freier Länge, 0,9 m v. M. z. M., $k_1 = 60$ (Totalbelastung pro qm = 500), sollen einen Querschnitt a) b : h = 5 : 7, b) = 1 : 2 erhalten. Wie stark sind sie jedesmal zu nehmen und welche Durchbiegung erfahren sie? — Antw.: a) 21,8 zu 30,5, ∾ 22/31; b) 17,2 zu 34,4, ∾ 18/35.

7. Für die Spannweite 5,4 m sind Fussbodenbalken 15/30 cm, ($k_1 = 60$) verfügbar. Wie weit sind dieselben aus einander zu legen, wenn die Totalbelastung pro qm 500 kg beträgt? — Antw.: 0,74 m.

8. Balken von 24/36 cm sind verfügbar. Können dieselben bei 7 m Spannweite 0,9 m aus einander gelegt werden? — Antw.: Die Totalbelastung darf pro qm 564 kg betragen, sie sind deshalb in dieser Weise, aber nur für Wohnhausbelastung, verwendbar.

9. Wieweit dürfen verfügbare Balken 21/29 cm frei gelegt werden, wenn sie v. M. z. M. 0,86 m aus einander liegen und pro qm die Totalbelastung 500 kg beträgt? — Antw.: x = 5,73 m.

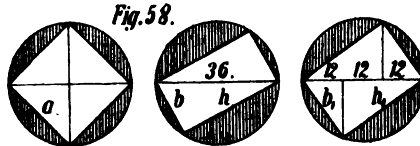
10. Ein Speicherfussboden ruht auf Balken von 24/38 cm und 7,8 m Spannweite, 0,96 m v. M. z. M. Wie hoch dürfte Getreide aufgeschüttet sein, wenn das specifische Gewicht 0,75 ist? — Antw.:

$$\frac{7{,}8 \,.\, 0{,}96 \,.\, x \,.\, 750 \,.\, 780}{8 \,.\, 60} = \frac{1}{6} \,.\, 24 \,.\, 38 \,.\, 38; \text{ daraus } x = 0{,}632 \text{ m.}$$

11. Eine Glastafel liegt mit beiden Längsseiten auf, so dass die Spannweite 0,6 m beträgt. a) Wie stark muss sie wenigstens sein, wenn die Belastung pro lfd. m 300 kg betragen soll? b) Welche Belastung könnte sie aufnehmen, wenn sie 2 cm stark ist? (k = 25; $k_1 = 75$). — Antw.: a) 2,324 cm ∾ 24 mm.

12. Aus demselben Baumstamm von 36 cm Durchmesser seien drei verschiedene Balken geschnitten: quadratisch, rechteckig 1/2 und rechteckig nach der bekannten Konstruktion, also ∾ 5 : 7. Wie verhalten sich bei sonst gleichen Umständen die relativen Tragfähigkeiten der drei hochkant liegenden Balken?

Fig. 58.

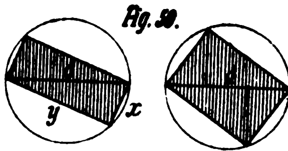


Die zulässigen Belastungen verhalten sich wie die Widerstandsmomente. Hierzu werden die Abmessungen berechnet: 1) a = 25,452; 2) b = 16,1, h = 32,2; 3) b_1 = 20,784, h_1 = 29,389.

$$W_1 : W_2 : W_3 = \frac{1}{6} a^3 : \frac{1}{6} b h^2 : \frac{1}{6} b_1 h_1{}^2 \sim 2748 : 2782 : 2992.$$

Berechne das Verhältniss allgemein aus dem Radius r, sowie ferner auch für die Flachkant-Lage.

13. Aus einem Stamm vom gegebenen Durchmesser d denjenigen rechteckigen Balken zu schneiden, welcher unter allen daraus möglichen Balken die grösste Biegungsfestigkeit besitzt.



Aufl. Soweit der Querschnitt dabei betheiligt ist, hängt die Tragfähigkeit eines rechteckigen Trägers von dem Produkt aus der Breite und der zweiten Potenz der Höhe ab, da $W = \frac{1}{6} b h^2$ ist. Werden die gesuchte Breite und Höhe mit x und y bezeichnet, so hat man also zu untersuchen, bei welchem von allen möglichen Rechtecken von derselben Diagonale d das Produkt $x y^2$ den grössten Werth erhält, d. h. ein Maximum (= max) wird. Um die Konstante einzuführen, setzt man $y^2 = d^2 - x^2$.

$$x y^2 = \max$$
$$x (d^2 - x^2) = \max$$
$$x^2 (d^2 - x^2)(d^2 - x^2) = \max$$
$$(2 x^2) . (d^2 - x^2) . (d^2 - x^2) = \max.$$

Nun ist die Summe der drei Faktoren gleich einer Konstanten, nämlich

$$2 x^2 + d^2 - x^2 + d^2 - x^2 = 2 d^2 = \text{konst.}$$

Folglich müssen, um dem Produkt den grösstmöglichen Werth zu geben, die drei Faktoren gleich gemacht werden.

$$2 x^2 = d^2 - x^2,$$

woraus

$$x^2 = d . \frac{1}{3} d \text{ oder } \mathbf{d : x = x : \frac{d}{3}};$$

$$\text{ferner } y^2 = d . \frac{2}{3} d \text{ oder } \mathbf{d : y = y : \frac{2}{3} d}.$$

Daraus ergiebt sich dann die bekannte Konstruktion. Die Seiten verhalten sich dabei

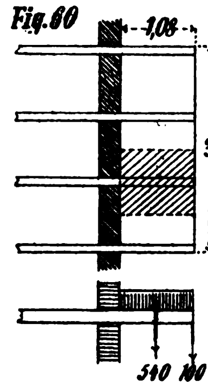
$$x : y = \left(d \sqrt{\frac{1}{3}}\right) : \left(d \sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 1 : \sqrt{2} = 1 : 1,414 \sim 5 : 7.$$

Für d = 39 cm wird z. B. x = 22,52 und y = 31,84 cm.

Anm. 1. Wird die Frage gestellt, welcher von allen Querschnitten gleichen Inhalts, also im allgemeinen gleicher Kosten, die

grösste relative Tragfähigkeit verleiht, so ist die Antwort: Je höher ausgebildet, um so mehr trägt ein Balken. Rücksichten der praktischen Ausführbarkeit, des Raumes etc. fordern ein gewisses Maasshalten für das Verhältniss der Querschnittsabmessungen.

Anm. 2. Sollte aus einem Stamm der Balken von der grössten Zug- oder Zerdrückungsfestigkeit herausgeschnitten werden, so kommt es nur darauf an, ihm den grössten Inhalt zu geben: Solches geschieht offenbar beim Geviert, daher Stützen wie Zugstangen meist quadratisch sind.



14. Ein Balkon von 3 m Länge tritt 1,08 m heraus. Zu seiner Unterstützung sollen womöglich die Fussbodenbalken ($b : h = 3 : 4$; $k = 60$) verwendet werden, welche 1 m aus einander liegen. Totalbelastung pro qm = 500, Brüstung pro lfd. m = 100.

Die vorspringenden Enden der Balken sind im Falle von 7. I c), da sie auf der Mauer als eingespannt zu betrachten sind durch die Belastung auf der andern Seite.

$$M = 39\,960; \; \frac{1}{8} h^3 = 666; \; h = \sqrt[3]{5328}$$

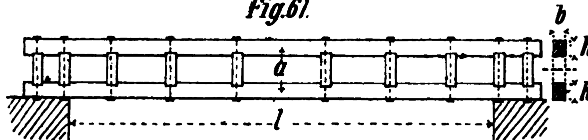
$$\sim 17{,}5; \; b \sim 13{,}1.$$

Gewöhnliche Fussbodenbalken sind hiernach zu verwenden.

Welche Abmessungen sind für die beiden äusseren Balken erforderlich?

Die vollständige Lösung dieser Aufgabe ist erst mit Hilfe von Aufgabe 26. möglich.

15. Ein hölzerner Gitterbalken hat bei einer Spannweite von 10 m pro lfd. m 00 kg zu tragen. Der Abstand a der Schwerpunkte beider Streckbalken sei = 60 cm; ferner $b : h = 7 : 9$. Welche Abmessungen hat man jedem Streckbalken zu geben?



Das Trägheitsmoment der als fest verbunden zu betrachtenden Streckbalken ist

$$J = 2\left(\frac{b\,h^3}{12} + b\,h \,.\, \frac{a^2}{4}\right); \text{ ferner } e = \frac{a + h}{2},$$

mithin

$$\frac{Q\,l}{8} = k \,.\, \frac{b\,h}{3} \,.\, \frac{3\,a^2 + h^2}{a + h}.$$

Für diesen Fall erhält man 50 000 (540 + 9 h) = 75 600 h² + 7
aus welcher Gleichung sich durch einiges Probiren ergiebt:

$$h > 21 \text{ und } < 22.$$

Wir setzen also h = 22 und b = 17,1, so dass der ganze Trä 82 cm hoch wird.

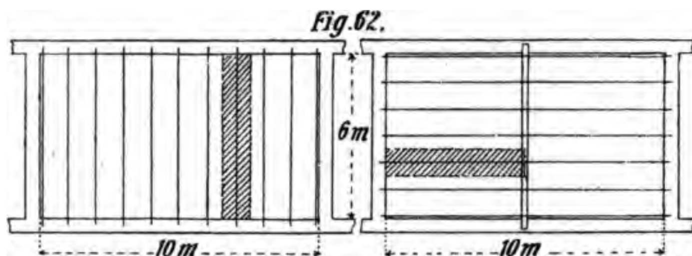
16. Die Fussbodenbalken aus Beispiel 3. S. 27 sind zu bere nen für b : h = 1 : 2; ferner das erforderliche Profil des I träg

Jede von den beiden Balkenhälften (siehe Fig. 20.) ist als ein seits (auf dem Träger) eingespannt, andererseits (auf der Mauer) aufliegend zu betrachten, daher nach 7. III. c) zu berechnen. Die Belastung jedes der beiden Träger wird, obwohl sie durch Balken in einzelnen Punkten übertragen wird, doch als gleichmäs vertheilt angesehen.

Man erhält h = 37,7 und b = 18,9 cm; ferner W ∾ 2679.

17. Ein Raum 6/10 m soll überdeckt werden; Totalbelastu der Decke 500 kg pro qm. a) die Balkenlage ist parallel der Qu wand; b) die Balkenlage ist parallel der Längswand und liegt der Mitte auf einem Unterzug; jedesmal 1 m v. M. z. M.; b : h = 3 k = 70. Es ist zu untersuchen, welche Anordnung am vorth haftesten ist.

Fig. 62.



Als erforderliche Abmessungen ergeben sich bei a) 29,5 22,2; bei b) Längsbalken 26,1 und 19,6; Unterzug 51,2 und 3 Nun liegen die Balken jedesmal 25 cm auf, sind also bei a) 6,5 bei b) 10,5 m lang zu nehmen. Der Unterzug liegt 40 cm auf, daher 6,8 m lang. Man erhält hiernach

bei a) für 11 Balken . . . . 4,682535 cbm Holz;

bei b) für 7 Balken . . 3,759966 } 5,093419 cbm Holz.
+ 1 Unterzug . 1,333453 }

Hiernach erfordert die Anlage b) mehr Holz und ist noch so mehr kostspielig dadurch, dass die längeren Hölzer verhältn mässig theurer sind. Auch abgesehen davon ist aber der ers Anlage der Vorzug zu geben wegen der grösseren Einfachh

Uebrigens würde auch der Unterzug wegen der zu grossen Abmessungen nicht aus Holz zu nehmen, vielmehr an seiner Stelle ein I Träger anzuwenden sein.

Für Spannweiten über 7 bis 8 m wird dagegen die zweite nordnung zur Nothwendigkeit, und zwar mit eisernem Unterzug. uch können dann die Längsbalken über dem Unterzug gestossen erden.

18. Ein Balken von 6 m Spannweite hat ausser der Fussbodenelastung (500 kg pro qm) 1,5 m von der einen Mauer entfernt einen tänder zu tragen, welcher einen Druck von 3000 kg auf ihn überägt. Der Balken liegt 0,9 m von den benachbarten Balken entrnt. Welche Abmessungen (b : h = 5 : 7) hat er anzunehmen? k = 60.

Es ergiebt sich zunächst 2700 als gleichmässig vertheilte Last nd 3000 als Einzellast. Die Reaktionen sind — 3600 und — 2100. er gefährliche Querschnitt liegt im Punkt der Einzellast.

$$M = 489\,375; \; \frac{5}{42} h^3 = 8156{,}25;$$

$$\text{daraus } h = \sqrt[3]{68\,512{,}5} \backsim 41 \text{ cm}; \; b \backsim 29{,}3 \text{ cm}.$$

19. Zur Ueberdeckung eines rechteckigen Raumes 6/8 m liegen Fussbodenbalken (b : h = 5 : 7) bei 8 m freier Länge und 0,9 m v. M. z. M. auf einem Unterzug, welcher in 3 m Abstand von der einen Quermauer liegt. a) Die Abmessungen der Balken sind zu ermitteln (k = 70), ferner b) ob der Unterzug aus Holz (b : h = 1 : 2) oder Eisen zu konstruiren ist.

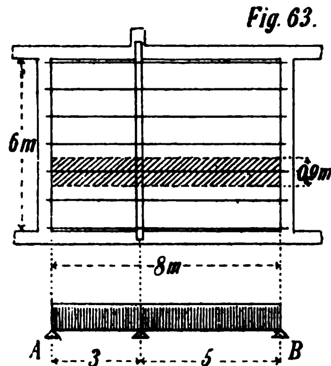


Fig. 63.

a) Das grösste Biegungsmoment des kontinuirlichen, gleichbelasteten Balkens ist in diesem Falle

$$M = \frac{Q\,l\,[n^3 + (1 - n)^3]}{8},$$

wobei n das Verhältniss des grösseren Abschnittes zur ganzen Länge bedeutet; also hier

$$M = \frac{3600 \,.\, 800}{8} \left[\left(\frac{5}{8}\right)^3 + \left(\frac{3}{8}\right)^3\right] = 106\,875;$$

$$W = \frac{106\,875}{70} = 1526{,}8 = \frac{1}{6}\, b\, h^2;$$

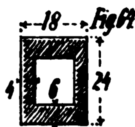
$$\frac{5}{42} h^3 = 1526{,}8; \; h = \sqrt[3]{12\,825{,}1} \backsim 23{,}5; \; b \backsim 16{,}8.$$

b) Der Unterzug hat, nach der Formel $\frac{Q}{8} \cdot \frac{-n^2+n+1}{n(1-n)}$, von der ganzen Fussbodenbelastung $\frac{24\,000}{8} \cdot \frac{79}{15} = 15800$ aufzunehmen.

$$\frac{15\,800 \,.\, 600}{8} = 70 \,.\, \frac{1}{6} \,.\, \frac{1}{2}\,h.\,h^2;$$

$$h = \sqrt[3]{203\,143} \backsim 58{,}8;\; b \backsim 29{,}4.$$

Hiernach wird man vorziehen, einen ⊥träger zu nehmen, dessen Widerstandsmoment $W \backsim 1693$ ist. Zwei solche Träger zu je 25 cm Höhe etc. würden dazu geeignet sein.



20. Ein hohler rechteckiger Gusseisenträger (Fig. 64) hat bei einer freien Länge von 6,8 m eine Einzellast 2,8 m von der Stütze entfernt, aufzunehmen. Wie gross darf dieselbe höchstens sein? $k = 250$. — Antw.: 2440,7.

21. Eine cylindrische Welle (Schmiedeeisen) von 4,8 m freier Länge hat in der Mitte ein Rad von 500 kg zu tragen. $k = 5$ kg pro qmm. Welcher Durchmesser ist erforderlich?

$$500 \,.\, 1200 = 5 \,.\, \frac{\pi}{32}\,d^3 \text{ (Benennung beiderseits kg mm!)}$$

$$d = \sqrt[3]{1\,222\,930} \backsim 107 \text{ mm}.$$

Sollte das Eigengewicht der Welle mit berücksichtigt werden, so würde man eine Gleichung dritten Grades erhalten. Bequem und genau genug rechnet man dann folgendermassen:

Das Gewicht der vorhin berechneten Welle würde sein:

$$G = \frac{\pi}{4}\,10^2{,}7 \,.\, 480 \,.\, 0{,}0078 \backsim 337 \text{ kg}.$$

Hiernach ist

$$500 \,.\, 1200 + 337 \,.\, 600 = 5 \,.\, \frac{\pi}{32}\,d_1{}^3$$

$$d_1 = \sqrt[3]{1\,635\,057} \backsim 118 \text{ mm}.$$

Anm. Wird $\frac{\pi}{32} \backsim \frac{1}{10}$ gerechnet, so ist $M = k \,.\, \frac{1}{10}\,d^3$ u

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\,M}{k}};$$

in diesem Falle ergiebt sich ohne Rücksicht auf Eigengewicht

$$d = \sqrt[3]{1\,200\,000} = 106{,}3 \text{ mm}$$

und

$$d_1 = \sqrt[3]{1\,604\,400} \backsim 117{,}1 \text{ mm}$$

mit Berücksichtigung des Eigengewichts.

22. Im Kranz eines Zahnrads wirke der Druck P. Gesu ist die erforderliche Dicke eines Zahnes, wenn $l = 1{,}5$ d und $b =$

genommen wird. Der Druck wird zur Sicherheit am Ende des Zahns angreifend gedacht.

Fig. 65.

$$P \cdot l = k \cdot \frac{1}{6} b \cdot d^2, \text{ woraus } d^2 = \frac{1{,}5\,P}{k};$$

für k = 2,5 (Gusseisen) wird $d = 0{,}775\sqrt{P}$.

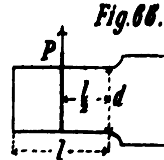
Da von der Theilung t alle anderen Abmessungen abhängen, insofern als l = 0,7 t, t = 2,1 d (nämlich 0,1 d für Spielraum) und b = 2 t für Krahnräder, = 3 t für Triebwerkräder gesetzt werden muss, so ist eine Formel für die Theilung t abzuleiten:

$$P \cdot 0{,}7\,t = 2{,}5 \cdot \frac{1}{6} \cdot b \cdot \left(\frac{t}{2{,}1}\right)^2, \text{ woraus } t = 2{,}72\sqrt{\frac{t}{b}P}.$$

Wenn die Zahl N der zu übertragenden Pferdestärken und die Umdrehungszahl n pro Min., sowie der Halbmesser des Rades R mm gegeben sind, so lässt sich daraus der am Radkranz stattfindende Druck P ermitteln.

Die Arbeit pro Sekunde ist = (N . 75 . 1000) kg mm; der Weg am Umfang pro Sekunde $= \frac{2\pi R n}{60}$ mm, folglich der Druck

$$P = (N \cdot 75 \cdot 1000) : \frac{2\pi R n}{60} = 716\,200\,\frac{N}{n R}.$$


Fig. 66.

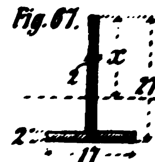
23. Ein oberschlächtiges Wasserrad, mitsammt der Welle 15 000 kg wiegend und ausserdem 3 cbm Wasser haltend, sitzt in der Mitte der Welle auf. Wie stark ist jeder der beiden gusseisernen Zapfen zu nehmen? (k = 200.)

Da die ganze Last sich auf beide Enden gleich vertheilt, so ist der Widerstand jedes Lagers = 9000 kg; derselbe lässt sich in der Mitte der Zapfenlänge vereinigt denken, so dass das grösste Biegungsmoment $= P \cdot \frac{l}{2}$ ist.

$$P \cdot \frac{l}{2} = k \cdot \frac{\pi}{32} d^3.$$

Da l : d in der Regel = $\frac{5}{4}$ bis $\frac{3}{2}$ genommen wird, so erhält man

$$d = \sqrt{\frac{l}{d} \cdot \frac{16\,P}{200 \cdot 3.14}}; \text{ hier wird für } \frac{l}{d} = 1{,}3,\ d \sim 17{,}3 \text{ cm}.$$


Fig. 67.

24. Ein ⊤träger (Gusseisen) von beistehenden Abmessungen liegt bei 6 m freier Länge beiderseits auf. Welche Belastung q kg pro lfd. m kann er aufnehmen?

$$l\,q \cdot \frac{100\,l}{8} = k \cdot W.$$

Es ergiebt sich $x = 17{,}96 \sim 18$, mithin $J = 6304$, und für $k_1 = 500$ ist $W_1 = 350{,}2$.

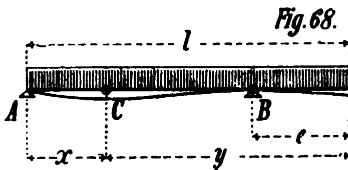
$$\frac{6\,q \,.\, 600}{8} = 500 \,.\, 350{,}2, \text{ woraus } q = 339{,}1.$$

25. Eine Welle (Schmiedeeisen), 4,2 m freie Länge, trägt die Einzellasten 1000, 2000, 800 kg in Punkten, welche die Länge in 1 m, 1,2 m, 1 m und 1 m zerlegen ($k = 5$).

Für den Punkt von 2000 kg ergiebt sich $M_{max} \sim 2\,990\,500$ kgmm, woraus $W = 598\,100$ und $d \sim 183$ mm. — Das Gewicht einer solchen Welle würde ~ 830 kg betragen und das Biegungsmoment um $\sim \frac{830 \,.\, 4200}{8}$ oder 435 750 erhöhen. Daraus ergiebt sich dann $M_{max} \sim 3\,426\,000$ und ferner $W = 685\,250$ und $d \sim 192$ mm.

26. Ein Träger von l m Länge, gleichmässig belastet mit q kg pro lfd. m, liegt am einen Ende und in einem zweiten Punkt, welcher e m vom andern Ende entfernt ist, auf. Es ist a) das grösste Biegungsmoment zu ermitteln, b) anzugeben, wo das zweite Auflager liegen muss, um die Tragfähigkeit zu einem Maximum zu machen.

Fig. 68.



Zunächst sind die Reaktionen A und B, dann der gefährliche Querschnitt C zu ermitteln.

$$A \,.\, [-(l-e)] - \frac{q\,(l-e)^2}{2} + \frac{q\,e^2}{2} = 0, \text{ daraus } A = -\frac{q\,l\,(l-2\,e)}{2\,(l-e)}.$$

Ebenso erhält man

$$B\,(l-e) + \frac{q\,l^2}{2} = 0 \text{ und } B = -\frac{q\,l^2}{2\,(l-e)}.$$

Ist der gefährliche Querschnitt C von A x m entfernt, so wird

$$-\frac{q\,l\,(l-2\,e)}{2\,(l-e)} + q\,x = 0, \text{ woraus } x = \frac{l\,(l-2\,e)}{2\,(l-e)}.$$

Hiernach ist

$$M_C = \frac{q\,l\,(l-2\,e)}{2\,(l-e)} \cdot \frac{x}{2} = \frac{q\,l^2\,(l-2\,e)^2}{8\,(l-e)^2}.$$

Berechne zur Kontrole den Abstand y und das Biegungsmoment M_C mit Hilfe davon auch von rechts!

In dem Auflager B ist ferner das Biegungsmoment, am besten rechts gerechnet,

$$M_B = \frac{q\,e^2}{2},$$

und zwar wirkt das letztere in entgegengesetztem Sinne wie M_C: Von A bis nahe vor B ist die konvexe Seite des Trägers nach unten, über B nach oben gerichtet. Auch in B ist also ein gefährlicher

Querschnitt. Welcher von beiden der gefährlichste ist, hängt offenbar von dem Abstand e ab.

Damit nun $M_C \gtreqless$ d. h. grösser, gleich oder kleiner als M_B werde, muss

$$\frac{l^2 (l - 2e)^2}{8 (l - e)^2} \gtreqless \frac{e^2}{2} \text{ oder } \left[\frac{l (l - 2e)}{2 (l - e)}\right]^2 \gtreqless e^2$$

sein. Hierzu muss aber weiterhin

$$l^2 - 2el \gtreqless 2el - 2e^2$$

$$e^2 - 2el \gtreqless -\frac{l^2}{2}$$

$$e^2 - 2el + l^2 \gtreqless \frac{l^2}{2},$$

daraus aber $e - l \lesseqgtr -\frac{l}{\sqrt{2}}$ (nur das Minuszeichen ist hier brauchbar und dadurch kehrt sich beim Wurzelziehen die Ungleichheit um!)

endlich $e \lesseqgtr l - \frac{l}{\sqrt{2}}$

oder $e \lesseqgtr 0{,}293\, l$ werden.

Ist hiernach das Auflager B dem Ende näher als 0,293 l, so ist für C das Biegungsmoment grösser als für B, und umgekehrt. In beiden Fällen ist das Material des Trägers nicht völlig ausgenutzt. Solches ist nur dann der Fall, wenn beide Querschnitte C und B gleich gefährlich sind:

$$M_C = M_B \text{ und hierzu } e = \mathbf{0{,}293\, l}.$$

Das nöthige Widerstandsmoment wird in diesem Falle

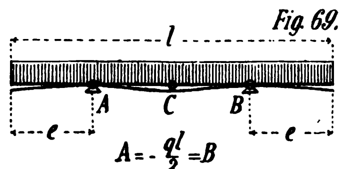
$$W = M : k = 0{,}043 \frac{q l^2}{k}$$

und die Tragfähigkeit $Q = q l \backsim 23 \frac{k W}{l}$, ist also fast dreimal so gross, als wenn auch die zweite Stütze ans Ende rückt.

Gieb die Grösse der Momente in A, C und B an, wenn $e = \frac{l}{2}$ und wenn $e > \frac{l}{2}$ wird, ferner wenn $e = 0$ ist!

Berechne die für die Fussbodenbalken in Aufgabe 14. erforderlichen Abmessungen unter der Annahme, dass die freie Länge zwischen den Mauern 6 m beträgt.

27. Ein Träger von l m Länge, gleichmässig belastet mit q kg pro lfd. m, liegt in zwei Punkten, die von den Enden gleichen Abstand e haben, auf Stützen. Es ist zu untersuchen, wie dieser Abstand zu wählen ist, wenn die grösstmögliche Tragfähigkeit erreicht werden soll.



Bei dieser symmetrischen Anordnung liegt ein gefährlicher Querschnitt

in der Mitte C, die beiden anderen in A und in B, wie auch d eintretende Biegung zeigt.

$$M_A = M_B = \frac{q\,e^2}{2};$$

$$M_C = \frac{q\,l}{2}\left(\frac{l}{2} - e\right) - \frac{q\,l}{2} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q\,l}{8}(l - 4\,e).$$

Solange diese Biegungsmomente ungleich sind, wird der Tr entweder zugleich in A und in B, oder aber in C nicht völlig genutzt. Das Maximum von Tragfähigkeit erreicht er, wenn

$$M_A = M_C$$

ist. Hierzu muss

$$\frac{e^2}{2} = \frac{l\,(l - 4\,e)}{8}$$

oder schliesslich

$$e = \frac{l}{2}(\sqrt{2} - 1) = 0{,}207\,l.$$

sein. Wenn $e > 0{,}207\,l$, ergiebt sich aus $M_A = \frac{q\,e^2}{2}$ das erforder

$$W = \frac{q\,e^2}{2\,k}.$$

Ist $e < 0{,}207\,l$, so erhält man aus $M_C = \frac{q\,l}{8}(l - 4\,e)$

$$W = \frac{q\,l\,(l - 4\,e)}{8\,k}.$$

Für $e = 0{,}207\,l$ ist

$$M_{max} = \frac{q \cdot (0{,}207\,l)^2}{2} \backsim 0{,}0214\,q\,l^2$$

und

$$W = \frac{0{,}0214\,q\,l^2}{k}.$$

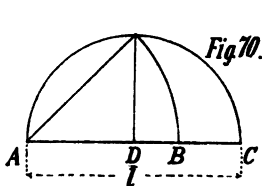
Die grösstmögliche Tragfähigkeit beträgt dann

$$Q = q\,l = \frac{k\,W}{0{,}0214\,l} \backsim 47\,\frac{k\,W}{l},$$

also etwa sechsmal soviel, als wenn derselbe Träger an den E aufgelegt wird.

Anmerkung. Die beiden Abstände 0,293 l und 0,207 l l sich sehr leicht durch dieselbe Konstruktion ermitteln:

Ueber l als Hypotenuse ein gleichschenkelig-rechtwinke Dreieck errichten, die Kathete = AB auf l abtragen. I



ist $AB = \frac{l}{\sqrt{2}}$, mithin

$$BC = l - \frac{l}{\sqrt{2}} = 0{,}293\,l$$

und

$$BD = \frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{l}{2} = 0{,}207\,l.$$

28. Ein Wasserkasten, 1,2 m lang, 0,65 m breit und 0,8 m hoch gefüllt, wird von zwei quadratischen Stangen (Stabeisen k = 700) von 1,7 m Spannweite getragen; er liegt auf der einen Seite hart an der Mauer. Welche Geviertseite a hat jede Stange anzunehmen, 1) wenn die Last über 1,2 m als gleichmässig vertheilt angesehen wird, 2) wenn, wie es mit dem Eintritt der Biegung thatsächlich geschieht, nur die Endkanten aufliegen? — Antw.: 1) a = 4,07 cm ∾ 41 mm; 2) a = 3,613 cm ∾ 37 mm.

29. Eisenbahnschienen von 13 cm Höhe sollen $\frac{1}{2}$ Stein starke Kappen tragen von 2 m Weite. Belastung pro qm total 750. a) Wie weit dürfen die Schienen frei liegen; b) wieviel Schienen sind anzuordnen bei 3 m freier Länge?

a) Bei x m freier Länge hat jede Schiene (2 x . 750) kg zu tragen; $M = \frac{2\,x\,.\,750\,.\,100\,x}{8}$; k W = 700 . 140,4. Hieraus x = 2,28 m.

b) Q = 3 . 2 . 750 = 4500; 700 W = $\frac{4500\,.\,300}{8}$; daraus W = 241.

Man hätte hiernach zwei Schienen von 13 cm (zur Noth auch schon von 12 cm) neben einander oder etwa einen ⊥träger von 21 cm Höhe etc. zu nehmen.

30. Der Fussboden eines 3,3 m breiten Flurs findet der Länge nach in Abständen von je 4 m Unterstützung. Derselbe ist herzustellen 1) aus $\frac{1}{2}$ Stein starken Kappen, welche von zwei zwischengelegten Längsträgern aufgenommen werden, 2) aus Wellblech.

1) Gewicht der Zwischendecke pro Träger

= 1,1 . 4 . 750 = 3300; W = 235,7.

Hierzu passt ein Träger b = 10, h = 20, Stegdicke 0,8, Flanschenstärke 1,1 cm.

2) Da Wellblech bis zu 4 m frei liegen kann, so kann dasselbe hier in beiden Richtungen ohne Zwischenträger gelegt werden. In den Listen der Fabriken wird das Widerstandsmoment für 1 m Breite, bezogen auf mm, angegeben. Die Totalbelastung des Wellblechs mit Betonschicht, Fussboden und Nutzlast wird zu 450 kg pro qm angenommen; k = 7,5 pro qmm.

Wenn das Blech nun auf die Längsmauern aufgelegt wird, so ist die zu tragende Last pro lfd. m Breite = 3,3 . 450 = 1485 und für den mittleren Querschnitt $M = \frac{1485\,.\,3300}{8}$ kgmm, demnach $W = \frac{1485\,.\,3300}{8\,.\,7{,}5} = 81\,675$. Ein Blech, dessen Welltiefe 10 cm, halbe Wellbreite 5 cm, Blechstärke 1,5 mm ist, hat W = 84 600.

Würden die Blechtafeln in der Längsrichtung gelegt werden, so würde man W = 120 000 erhalten, wofür ein Profil von 8/5/0,3 cm genügte. Das Gewicht desselben beträgt aber ca. 52 kg pro qm, während das erstere nur ca. 30 kg pro qm wiegt, also dementsprechend billiger ist.

Müsste man auf eine besonders starke Belastung der Decke rechnen, so wäre 750 kg pro qm anzunehmen. Man erhält dann im ersten Fall W = 136 125 und ein Blech von 9 cm Welltiefe, aber 3 mm Stärke (W = 144 000). Im zweiten Fall wird W = 200 000 und ein Blech von 14/6/0,2 cm erforderlich.

31. Die Decke für einen Fabriksaal (Totalbelastung pro qm 850) von 14,4 m Länge und 9 m Breite soll durch zwei genietete Blechträger (k = 750) unterstützt werden, welche, in den Längsmauern aufliegend, das ganze Rechteck in drei gleiche Felder von je 4,8 m Breite theilen. Welches Profil ist den Trägern zu geben:

$$W = \frac{43{,}2 \,.\, 850 \,.\, 900}{8 \,.\, 750} = 5508,$$

wofür das S. 40, Fig. 29. angegebene Profil mit W = 5637 passen würde.

Um für die Bestimmung des Profils aus dem gefundenen Widerstandsmoment, unter Annahme einer passenden Höhe h, einen Anhaltspunkt zu gewinnen, lasse man das Vertikalblech ausser Acht, nehme also an, dass der gesammte Widerstand von den Querschnitten der beiden Gurte geleistet wird. Ist jeder derselben = f, sein Trägheitsmoment um seine Schwerpunktsachse = i, der Abstand dieser letzteren von der ganzen Höhenmitte annähernd $= \frac{h}{2}$, so ist das Trägheitsmoment des Trägers

$$J = 2\left[i + f \,.\left(\frac{h}{2}\right)^2\right] = 2\,i + f\,\frac{h^2}{2}$$

oder, da 2 i sehr klein gegen J ist,

$$J = f\,\frac{h^2}{2} \text{ und } W = J : \frac{h}{2} = f\,h,$$

woraus sich der für jeden Gurt erforderliche Querschnitt annähernd $f = \frac{W}{h}$ oder $f = \frac{M}{k\,h}$ ergiebt. Vergleiche auch den Zusatz auf S. 32.

Für das obige Profil würde man erhalten f $\backsim$ 70 qcm, während in der That der Querschnitt etwa 66 qcm beträgt.

Das Auflager der Träger auf der 2 Stein starken Längsmauer ($k_1 = 7$) betreffend, ergiebt sich die Nothwendigkeit einer Unterlagsplatte von 52 zu 51 cm.

32. Eine 4 m hohe Zwischenmauer ($\frac{1}{2}$ Stein), Spannweite 6 m, mit je einer Thüröffnung 1,5/2 m zu beiden Seiten, soll durch einen ⟙träger abgefangen werden.

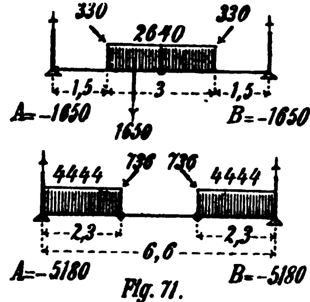


Fig. 71.

Belastung, über 3 m gleichmässig vertheilt, = 3300.

M = (— 1650) . (— 300) + 1650 . (—75)
= 1650 . 225 = 371 250;
W = M : k = 530,4.

Profil (∾) h = 23 cm, b = 11 cm.

Berechne für 32. und 33. Widerstandsmoment und Profil für die Annahme, dass das halbe Gewicht des über der Thür befindlichen Mauerwerks jedesmal als Einzellast wirksam ist. Beachte hierzu die Ausführungen in Beispiel 34.

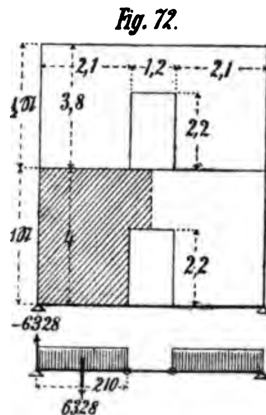
33. Eine 4,2 m hohe Zwischenmauer (1 Stein), Spannweite 6,6 m, mit einer Thüröffnung in der Mitte 2/2,6 m in der Mitte, soll durch einen ⟙träger abgefangen werden. Siehe die Belastungsskizze in Fig. 71.

M = (— 5180) . (— 230) + 5180 . (— 115) = 5180 . 115 = 595 700;
W = M : k = 851. Profil (∾) h = 32 cm, b = 14 cm.

34. Eine durch zwei Stockwerke von 4 m und 3,8 m Höhe gehende Zwischenmauer von 5,4 m Spannweite, 1 Stein und $\frac{1}{2}$ Stein stark, je mit einer Thüröffnung, 1,2 m zu 2,2 m, in der Mitte, soll durch schmiedeeiserne ⟙träger abgefangen werden.

a) Die Balkenlage in allen drei Stockwerken ist parallel zu der Mauer. Die Ansichtsfläche der untern Mauer ist zur Hälfte (die schraffirte Fläche Fig. 72.):

Fig. 72.



2,7 . 4 — 0,6 . 2,2 = 9,48 qm,
mithin das Gewicht
= 460 . 9,48 = 4360,8.

Ebenso bei der oberen Mauer zur Hälfte:

2,7 . 3,8 — 0,6 . 2,2 = 8,94 qm
und das Gewicht
= 220 . 8,94 = 1966,8.

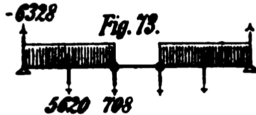
Hieraus ergiebt sich

M = 6328 . 105 = 664 440,

$$W = \frac{664\,440}{700} \backsim 949,$$

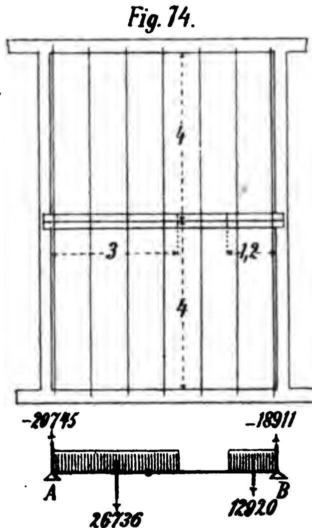
wofür zwei Träger von ca. 13 cm Breite und 25 cm Höhe genügen werden.

Hierbei ist angenommen, dass die Last des halben über der Thür liegenden Mauerwerks sich gleichmässig über die 2,1 m vertheilt, was ja auch dem thatsächlichen Verhältniss am meisten entspricht. Soll dieselbe dagegen als Einzellast zu beiden Seiten der Thüröffnung gerechnet werden, so ergeben sich für M und W etwas grössere Werthe. Nach Fig. 73. wird dann M = 6328 . 210 — 5620 . 105 = 738 780 und W = 1056, wofür dann Träger von etwas stärkerer Stegdicke und Flanschenhöhe zu nehmen wären.



Führe dieselbe Rechnung durch für den Fall, dass die Thüröffnung von denselben Abmessungen an einer Seite liegt; ebenso für den Fall, dass an beiden Seiten Thüröffnungen von 1 m zu 2 m liegen sollen.

b) Die Balkenlagen der beiden oberen Stockwerke gehen über die Mauer durch (während die unterste Balkenlage dem Träger parallel liegt und ihn deshalb nicht belastet). Die Thüröffnungen liegen 3 m von links, also 1,2 m von rechts entfernt. (Fussbodenbelastung pro qm total 500 kg).



Auch hier genügt es vollkommen, wenn das Gewicht des über den Thüröffnungen liegenden Mauerwerks mitsammt den aufliegenden Fussbodenbelastungen durch den Entlastungsbogen auf das andere Mauerwerk gleichmässig vertheilt angenommen wird. Man erhält dann nebenstehende Belastungsskizze und demgemäss folgende Werthe:

Der gefährliche Querschnitt liegt $\frac{20\,745}{8912} = 2{,}328$ m $\backsim$ 233 cm von A entfernt.

Hierfür wird

$$M_{max} = 20\,745 \,.\, 116{,}5 = 2\,416\,793 \text{ und } W \backsim 3453.$$

Danach hat man entweder zwei Träger von 42,5 cm Höhe und 16,3 cm Breite (W = 1754) oder drei Träger von 40 cm Höhe und 14 cm Breite (W = 1200) anzuordnen. Da das Gewicht pro lfd. m für den ersten Träger 103,7 kg, für den letzteren 83 kg beträgt, so

ist die Konstruktion mit zwei Trägern vortheilhafter. Auch ist die Breite von 2 . 16,3 ∾ 33 cm zur Aufnahme der 1 Stein starken Mauer ganz passend. Bei A müsste dann jedenfalls eine Unterlagsplatte angebracht werden.

Berechne dieselbe Konstruktion für den Fall, dass die Thüröffnungen in der Mitte liegen, ferner dass in jedem Stockwerk eine Thüröffnung auf jeder Seite angebracht ist!

35. Eine Decke soll aus ⌶trägern und Wellblech dazwischen konstruirt werden. Spannweite der Träger 7,2 m; v. M. z. M. 2 m; Belastung 500 kg pro qm total.

a) Wie stark sind die Träger; b) wie stark ist das Wellblech zu nehmen?

Zu a) Q = 14,4 . 500 = 7200; W ∾ 926, wonach das Profil etwa 14 cm breit und 32 cm hoch zu wählen ist.

Zu b) Nach den Erörterungen in Aufgabe 30. ist die Länge der Tafeln 2000 mm, als Breite wird das lfd. m gerechnet. Die gleichmässig vertheilte Last ist also für 2 qm, Q = 1000 kg.

$$W = \frac{1000 \,.\, 2000}{8 \,.\, 7{,}5} = 33\,334.$$

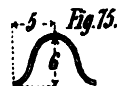


Fig. 75.

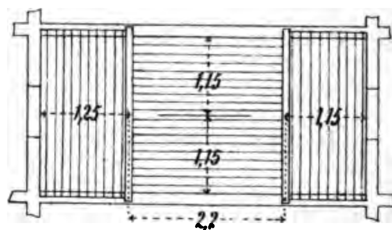
Hierfür würde sich ein Blech von 6 cm Welltiefe, 5 cm halber Wellbreite und 1,5 mm Blechstärke mit 37800 = W eignen.

36. Eine Treppenanlage von untenstehenden Abmessungen für ein gewöhnliches Etagenhaus soll aus Wellblech zwischen ⌶trägern konstruirt werden.

Stockwerkshöhe 3 m, Podestbreite bei den Etageneingängen 1,25 m, an der Fensterwand 1,15 m, Treppenbreite 1,15 m. Ein Treppenarm (Höhe 1,5 m) habe 9 Antritte zu 16,7 cm, wozu 8 Auftritte zu 27,5 cm (nach der Formel 2 s + a = 61 gerechnet) erforderlich sind; mithin ist die Horizontalprojektion des Treppenarms 8 . 27,5 cm = 2,2 m lang.

Belastung der Treppe pro qm Horizontal-Projektion: Eigengewicht 150 + Menschengedränge 400 = 550 total.

Belastung der Podeste pro qm: 100 + 400 = 500 total.



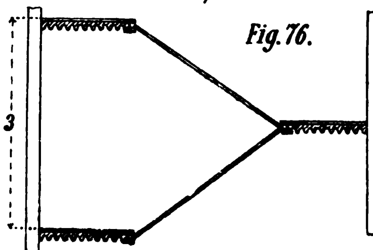


Fig. 76.

a) Welches Profil haben die Träger anzunehmen?

b) Das Wellblech für die Treppe,

c) das Wellblech für die Podeste ist zu bestimmen.

a) Die auf beiden Längsmauern aufliegenden Iträger haben, da sie von den Podest-Wellblechen nicht belastet werden, nur die Last der Treppenarme aufzunehmen.

Horizotalprojektion eines Treppenarmes $= 1{,}15 \,.\, 2{,}2 = 2{,}53$ qm: Gesammtlast eines Treppenarmes Q $\backsim$ 1390.

Die aus Fig. 77. ersichtliche Zerlegung ergiebt schliesslich folgende Drücke:

In C ... Vertikaldruck $CE = \frac{1}{2} Q \,.\, \cos^2 \alpha;$

... Horizontaldruck $CF = \frac{1}{2} Q \,.\, \cos \alpha \sin \alpha.$

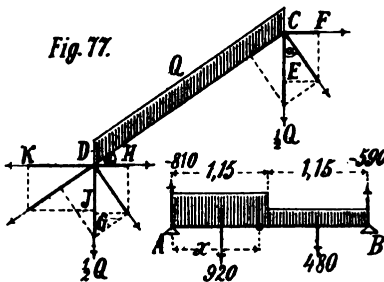
In D ... Vertikaldruck $DG + DJ = \frac{1}{2} Q \cos^2 \alpha + Q \sin^2 \alpha$

$= \frac{1}{2} Q (\cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha)$

$= \frac{1}{2} Q (1 + \sin^2 \alpha);$

... Horizontaldruck $DK - DH = Q \cos \alpha \sin \alpha - \frac{1}{2} Q \cos \alpha \sin \alpha$

$= \frac{1}{2} Q \cos \alpha \sin \alpha.$



$$\sin \alpha = \frac{1{,}5}{2{,}663} = 0{,}5633$$

$$\cos \alpha = \frac{2{,}2}{2{,}663} = 0{,}8261$$

Man erhält mit Hilfe hiervon folgende Werthe.

Vertikaldruck oben:

$695 \,.\, 0{,}6825 = 474{,}3375 \backsim 480.$

Vertikaldruck unten: ..... $695 \,.\, 1{,}3173 = 915{,}5235 \backsim 920.$

Aus der Belastungsskizze in Fig. 77. ergiebt sich dann die Lage des gefährlichen Querschnitts aus der Gleichung:

$$0 = -810 + \frac{920}{1{,}15} \,.\, x.$$

Die Entfernung x von A ist danach 1,0125 m und hieraus

$$M = 810 \,.\, \frac{101{,}25}{2} = 41\,006{,}25 \text{ kg cm.}$$

$$W = \frac{41\,006}{700} \backsim 58{,}6.$$

Hierzu passt ein Profil (Fig. 78.) von 6,3 cm Breite und 10,35 cm Höhe (mit $59{,}8 = W$).

Man hat noch zu untersuchen, ob dieser Träger auch dem seitlichen Druck gewachsen ist. Letzterer beträgt sowohl von Seiten des aufsteigenden wie absteigenden Treppenarms $\frac{1}{2} Q \cos \alpha \sin \alpha$, so dass der Träger den gleichmässigen Seitendruck

$$Q \cos \alpha \sin \alpha = 646{,}98 \backsim 650$$

auszuhalten hat. Man erhält W $\backsim$ 27 als erforderliches Widerstandsmoment des Querschnitts um die lothrechte Symmetrieachse.



Für nebenstehendes Profil (Fig. 78.) ist aber für diese Achse

$$W \backsim \frac{1}{6} \,.\, 1{,}9 \,.\, 6{,}3 \,.\, 6{,}3 \backsim 13,$$

wobei das Moment des Stegs unberücksichtigt geblieben ist.

Man wähle also folgendes Profil: Breite 8,9, Höhe 13,05, Flanschenstärke 1,05.

b) Da die Wellbleche auf 3 bis 4 m frei liegen können, so ist hier das Blech der Länge des Treppenarms nach, also 2,663 m, lang zu nehmen. Belastung ist der aus der Gesammtlast 2,2 . 550 = 1210 entspringende Normaldruck. Für 1 m Breite ist derselbe 1210 . $\cos \alpha$ $= 1210 \,.\, 0{,}8261 \backsim 1000$ kg und $W = \frac{1000 \,.\, 2663}{8 \,.\, 7{,}5} = 44\,383$. Hiernach hat man ein Blech von 9 cm Welltiefe, 5 cm halber Wellbreite und 1 mm Stärke zu wählen.

c) Das Blech für die Podeste ist in der Länge von 2,3 m zu nehmen.

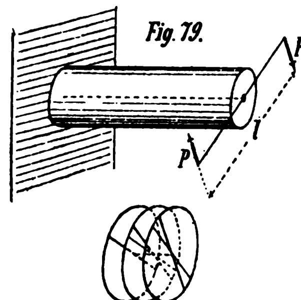
$$W = \frac{2{,}3 \,.\, 500 \,.\, 2300}{8 \,.\, 7{,}5} = 44\,084,$$

wofür dasselbe Blech wie bei b) passen würde.

---

5. Drehungs- oder Torsionsfestigkeit.

1. Einleitung. Auf einen stabförmigen Körper, welcher an einer Stelle fest eingespannt sei, wirken an einer andern Stelle in einer zur Längsrichtung senkrechten Ebene zwei gleiche antiparallele Kräfte P kg im Abstand l cm, so dass das Moment dieses Paares M = (P l) kg cm ist.



Bei der dadurch eingetretenen Formveränderung erfährt jeder Querschnitt gegen den nächstbenachbarten eine äusserst geringe Verschiebung im Sinne der Drehwirkung der Kraft, aber keine Bewegung in der Längsrichtung. Hierbei wird angenommen, dass jeder Querschnitt dabei eben bleibt.

In der Zeichnung sind drei benachbarte Querschnitte dargestellt in der veränderten Lage zu einander.

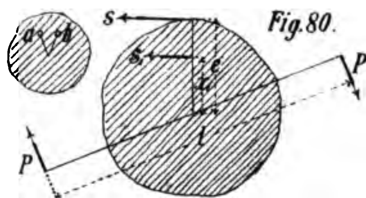
In diesem einfachsten Falle ist der Grad der Verdrehung an allen Stellen des Stabes gleich. Wäre z. B. der Stab an beiden Enden eingespannt und durch das Kräftepaar in einem Punkte angegriffen, der nicht die Längenmitte ist, so würde er in den beiden Theilen offenbar nicht gleich stark verdreht werden. Während also im ersten Fall kein Querschnitt gefährlicher ist als der andere, sind im letzteren die Querschnitte des kürzeren Theils mehr gefährdet als diejenigen des längeren Theils.

2. Lage des Torsionsmittelpunktes. Der Punkt, um welchen die Drehung des Querschnitts stattfindet, ist jedesmal sein Schwerpunkt.

Der Beweis hierfür ist ähnlich wie dafür, dass bei der Biegungsfestigkeit die Drehachse des Querschnitts durch seinen Schwerpunkt geht. (Vergleiche hierzu IV. 2., S. 29.) Es wird nämlich gezeigt, dass, wenn der Widerstand jedes Flächentheilchens, welcher normal zu dem betreffenden Radius gerichtet ist, in zwei Seitenkräfte zerlegt wird, die parallel zu zwei durch den Schwerpunkt kreuzweise gelegten Achsen sind, die algebraische Momentensumme sämmtlicher Querschnittstheilchen in Bezug auf jede von beiden Achsen gleich Null ist.

Die Linie, welche die Schwerpunkte aller Querschnitte verbindet, also die Achse des Stabes, behält hiernach bei der Verdrehung ihre gerade Form bei.

3. Gleichgewicht zwischen den inneren und äusseren Kräften. Die Kraft, welche die Querschnitte gegen einander verschiebt, wirkt in der Grenzebene beider Querschnitte, also in derselben Ebene, in der die Trennung erfolgen würde. Daher ist der zu leistende Widerstand nichts anderes als Schubfestigkeit. Die äusserst zulässige Beanspruchung pro qcm ist daher $= k_2$. Ist ein Theilchen z. B. von a nach b verdreht, so wird es durch die Schubelasticität wieder zurückgeführt, sobald die drehende Kraft zu wirken aufhört.



Die Widerstände verhalten sich dabei, wie man wieder sieht, wie die Entfernungen der betreffenden Querschnittstheilchen vom Schwerpunkt. In dem am weitesten entfernten Theil des Querschnitts (Abstand e) wird daher der grösste Widerstand herrschen. Sei dieser grösste Widerstand, für die Flächeneinheit als Querschnitt, $= s$ angenommen, so hat man für den Widerstand s_1 der Flächeneinheit im Abstand x_1

$$s_1 : s = x_1 : e; \text{ daraus } s_1 = \frac{s}{e} x_1$$

und allgemein

$$s_n = \frac{s}{e} x_n \, .$$

Liegen in demselben Abstand x_1 so viele Fasern, dass die Summe ihrer Querschnitte $= f_1$ Flächeneinheiten ist, so ist ihr Gesammtwiderstand $= f_1 \, s_1$, und da der Arm desselben x_1 ist, so ergiebt sich das Moment $= f_1 \, s_1 \, . \, x_1 = f_1 \frac{s}{e} x_1^2$.

Die Momentensumme aller inneren Kräfte (Widerstände) ist hiernach

$$\frac{s}{e} [f_1 \, x_1^2 + f_2 \, x_2^2 + \ldots . + f_n \, x_n^2] \, .$$

Führt man statt s die zulässige Schubspannung k_2 pro Flächeneinheit ein, so ist die Momentensumme der inneren Kräfte

$$\frac{k_2}{e} \Sigma f x^2 .$$

Der Ausdruck $\Sigma f x^2$ ist aber nach Satz 3. S. 34. das polare Trägheitsmoment, mit J_p bezeichnet.

Für den Fall des Gleichgewichts zwischen äusseren und inneren Kräften, d. i. zwischen dem drehenden Kräftepaar, dessen Moment $M = P \, l$ ist, und allen Widerständen im gefährlichen Querschnitt, ist hiernach

$$M = \frac{k_2}{e} J_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

oder wenn noch $\frac{J_p}{e}$ das **polare Widerstandsmoment** genannt und mit W_p bezeichnet wird,

$$M = k_2 \, W_p \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (26)$$

Die Werthe von J_p und W_p für die hierbei am meisten vorkommenden Querschnitte ergeben sich nun, mit Hilfe der Sätze in IV. 4., wie folgt:

Für den kreisförmigen Querschnitt:

$$J_p = \frac{\pi}{2} r^4 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{d^4}{16} = \frac{\pi}{32} d^4 ;$$

$$W_p = \frac{\pi}{32} d^4 : \frac{d}{2} = \frac{\pi}{16} d^3 .$$

Für den kreisringförmigen Querschnitt (D und d):

$$J_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) ;$$

$$W_p = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi}{16} \frac{D^4 - d^4}{D} .$$

Für den quadratischen Querschnitt:

$$J_p = 2 \, . \, \frac{1}{12} a^4 = \frac{1}{6} a^4 ;$$

$$W_p = \frac{1}{6} a^4 : \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{6} a^3 \sqrt{2} .$$

Die wichtigsten Werthe finden sich nun in folgender Tafel zusammengestellt.

4. Tafel VII. der polaren Trägheits- und Widerstandsmomente für den Schwerpunkt.

Nr.	Querschnitt	J_p	W_p
1.	(Kreis, Durchmesser d)	$\frac{\pi}{32} d^4$	$\frac{\pi}{16} d^3$
2.	(Quadrat, Seite a)	$\frac{1}{6} a^4$	$\frac{1}{6} a^3 \sqrt{2}$
3.	(Rechteck b, h, Diagonale d)	$\frac{1}{12} b\,h\,(b^2 + h^2) = \frac{1}{12} b\,h\,d^2$	$\frac{1}{6} b\,h \sqrt{b^2 + h^2} = \frac{1}{6} b\,h\,d$
4.	(Rechteck b, h, Diagonale d)	$\frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2} = \frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{d^2}$	$\frac{1}{3} \frac{b^2 h^2}{\sqrt{b^2 + h^2}} = \frac{1}{3} \frac{b^2 h^2}{d}$

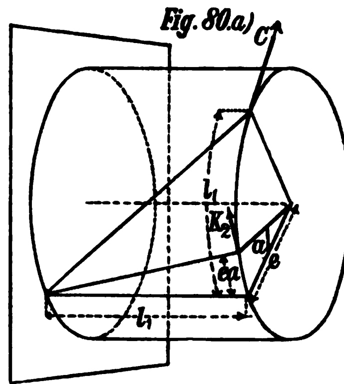
Anmerkung. Von den beiden für die rechteckigen Querschnitte geltenden Formeln 3. und 4. ergiebt sich die erstere für J_p aus den äquatorialen Trägheitsmomenten $\frac{1}{12} b\,h^3$ und $\frac{1}{12} h\,b^3$ mit Hilfe von dem Satz 3. S. 34. Sie wird bei geringem Unterschied der Abmessungen b und h benutzt. Ist h gegen b ziemlich gross, so findet die Voraussetzung, dass die Querschnitte bei der Drehung eben bleiben, nicht mehr statt; sie werden windschief, deshalb muss in diesem Falle nach 4. gerechnet werden.

5. Verdrehungswinkel. Die Verschiebung, welche je zwei benachbarte, gleich weit entfernte Scheiben des prismatischen Stabes gegen einander erfahren, ist überall die gleiche, und zwar äusserst klein. Alle diese Verschiebungen addiren sich zu einer messbaren Verdrehung der Enden gegen einander, welche unter einer gewissen Grenze bleiben muss, wenn das Material sie aushalten soll. Dieser Winkel, um welchen der Querschnitt, in dessen Ebene das Drehmoment

greift, gegen denjenigen an der Stelle der Einspannung gedreht , heisst der Verdrehungswinkel α; und zwar wird gewöhnlich runter die zum $\angle \alpha^0$ gehörige Bogenlänge für den Abstand 1 m Schwerpunkt verstanden, so dass

$$\alpha = \frac{2\pi \cdot 1}{360} \cdot \alpha^0 = \frac{\pi}{180} \alpha^0 \text{ ist.}$$

Der äusserste Theil des Querschnitts, dessen Abstand vom hwerpunkt $= e$ ist und in welchem nach den Ausführungen in 3. o qcm höchstens die Spannung k_2 herrschen darf, führt dann bei r Verdrehung einen Bogen von der Länge $e\,\alpha$ aus, da sich die ögen wie die Radien verhalten. Da nun bei verschiedener Länge s verdrehten Stabes eine gleiche Spannung verschieden grosse erschiebungen hervorbringt, und auch das Material dabei von ossem Einfluss ist, so muss zur Bestimmung des Verdrehungswinkels e freie Länge l_1 des Stabes und der Elasticitätsmodul seines aterials eingeführt werden.



Unter dem Elasticitäts-odul C für Verschiebung sst sich nun diejenige Anzahl kg rstehen, welche das eine Ende nes Stabes von 1 qcm Querschnitt gen sein festgehaltenes anderes nde um eine Strecke gleich der nzen Länge des Stabes verschieben ürde, falls das Material vollkom-en elastisch wäre.

Wie aus der Figur hervorgeht, alsdann, genau entsprechend den Erörterungen in Einleitung 5. d in I. 6.

$$e\,\alpha : l_1 = k_2 : C,$$

raus

$$\frac{k_2}{e} = \frac{C\,\alpha}{l_1}.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes in die Gleichung $M = \frac{k_2}{e} J_p$ ält man

$$M = \frac{C\,\alpha}{l_1} \cdot J_p \text{ und daraus weiter } \alpha = \frac{M\,l_1}{C\,J_p}.$$

Wird noch an Stelle der Bogenlänge der Winkel α^0 eingeführt, ist

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \alpha^0 = \frac{M\,l_1}{C\,J_p}$$

d

$$\alpha^0 = \frac{180}{\pi} \frac{M\,l_1}{C\,J_p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Für die Berechnung von **Wellen** ist die Grösse der Verdrehung von besonderer Wichtigkeit. Man nimmt als praktische Regel an, dass die Verdrehung höchstens $\frac{1}{4}$ Grad auf je 1 m Länge betragen darf, und muss, um dieselbe nicht zu überschreiten, unter Umständen für eine Welle stärkere Abmessungen anordnen, als der sonst zulässigen Spannung in den äussersten Theilen des Querschnitts entsprechen würde; wie folgendes **Beispiel** zeigt.

Ein walzenförmiger Stab aus Schmiedeeisen ($k_s = 4$ pro qmm) ist in wagerechter Lage bei 2 m freier Länge an einem Ende fest eingespannt, am andern durch 300 kg am Arm 0,6 m auf Drehung in Anspruch genommen. a) Welchen Durchmesser (d mm) hat derselbe anzunehmen? b) Welche Verdrehung erfährt er dadurch? C = 8000 pro 1 qmm nach Tafel I. S. 5.

a) $M = 300 . 600 = 180\,000$ kg mm.

$$180\,000 = 4 . \frac{3{,}14}{16} d^3$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{180\,000 . 2}{1{,}57}} = \sqrt[3]{229\,300} = 61{,}3 \text{ mm.}$$

$$\text{b)}\quad \alpha^0 = \frac{180}{3{,}14} \cdot \frac{180\,000 . 2000}{8000 . \frac{3{,}14}{32} . 61^4{,}3} \backsim 1{,}8.$$

Die zulässige Verdrehung beträgt dagegen auf 2 m Länge nur $2 . \frac{1}{4} = 0{,}5$ Grad. Folglich muss der Welle ein grösserer Durchmesser d_1 gegeben werden. Hierzu reducire man Gleichung (27) auf d_1 und setze $\alpha_1{}^0 = 0{,}5$.

$$d_1 = \sqrt[4]{\frac{180}{\pi} \cdot \frac{M\,l}{C . \frac{\pi}{32} \alpha_1}} = \sqrt[4]{\frac{180 . 180\,000 . 2000 . 32}{\pi^2 . 8000 . 0{,}5}} = 84{,}852;$$

$$d_1 \backsim 84{,}9 \text{ mm.}$$

Um noch den Widerstand x kg zu ermitteln, welcher von den äussersten Querschnittstheilen der so eingerichteten Welle pro qmm verlangt wird, hat man folgendes:

$$180\,000 = x . \frac{3{,}14}{16} . 84^3{,}9,$$

woraus

$$x = \frac{180\,000 . 16}{3{,}14 . 84^3{,}9} = 1{,}499 \backsim 1{,}5 \text{ kg.}$$

6. Beispiele für die Berechnung der Drehungsfestigkeit

1. An einer Bohrstange von Schmiedeeisen, Geviertseite 30 mm arbeiten 2 Mann an Hebeln von 0,8 m Länge mit je 16 kg Druck. Welcher äusserste Schubwiderstand wird dadurch hervorgerufen?

$$32 \,.\, 800 = x \,.\, \frac{1}{6} \,.\, 30^3 \,.\, \sqrt{2}; \;\; x = 4{,}02 \text{ kg pro qmm.}$$

In Anbetracht der starken Erschütterungen, denen die Stange ausgesetzt ist, muss diese Spannung reichlich hoch erscheinen.

Als Verdrehungswinkel erhält man, bei $l_1 = 3$ m Länge, $\alpha^0 = 4{,}08$, so dass pro lfd. m die Verdrehung $1^0{,}36$ beträgt.

Berechne, welche Geviertseite die Stange annehmen müsste und wie gross alsdann der äusserste Schubwiderstand sein würde, wenn die Verdrehung im Ganzen nur $\frac{3}{4}^0$ betragen soll.

2. Wie stark wäre die Stange von 1. zu nehmen, wenn der Widerstand in der äussersten Faser nicht mehr als 3,5 kg pro qmm betragen soll?

$$32 \,.\, 800 = 3{,}5 \,.\, \frac{1}{6} a^3 \,.\, \sqrt{2}; \;\; a = 31{,}5 \text{ mm.}$$

Berechne den Verdrehungswinkel für diesen Fall!

3. An einer Kurbelwelle wirken 2 Mann mit je 18 kg an 35 cm langen Kurbeln. Wie stark ist der Wellzapfen aus Schmiedeeisen ($k_2 = 4$) zu nehmen?

$$36 \,.\, 350 = 4 \,.\, \frac{\pi}{16} d^3; \;\; d \backsim 25{,}3 \text{ mm.}$$

Der sich ergebende Verdrehungswinkel $\alpha^0 \backsim 1{,}1$ für eine Länge von 0,5 m zeigt, dass die Welle stärker zu nehmen ist.

4. Eine hohle cylindrische Welle aus Gusseisen, 1 m lang, von 12 cm Durchmesser und dem Höhlungsverhältniss 0,5 wird durch eine am Arm 0,8 m wirkende Kraft angetrieben. a) Wie gross darf letztere sein, wenn als höchster zulässiger Widerstand pro qmm 1 kg gesetzt wird? b) Welche Verdrehung erfährt dieselbe? (C = 4000)

$$\text{a)} \;\; x \,.\, 800 = 1 \,.\, \frac{\pi}{32} \cdot \frac{120^4 - 60^4}{60}; \;\; \text{hieraus } x = 397{,}4 \text{ kg.}$$

$$\text{b)} \;\; \alpha^0 = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{397 \,.\, 800 \,.\, 1000}{4000 \,.\, \frac{\pi}{32} (120^4 - 60^4)} = 0{,}235.$$

5. Auf einer Transmissionswelle von Schmiedeeisen ($k_2 = 2$) sitzen der Reihe nach das treibende Rad A und die drei getriebenen Räder B, C und D, beziehentlich von dem Durchmesser 600, 500 und 400 mm. Die Widerstände, welche diese Räder an ihren Umfängen finden, sind beziehentlich 1000, 800 und 600 kg.

Welche Durchmesser sind den drei Wellstücken AB, BC und CD zu geben?

Für das Wellstück CD wirken 600 kg am Radius 200 mm auf Verdrehen, mithin ist

$$600 \,.\, 200 = 2 \,.\, \frac{\pi}{16} d_1^3;\ d_1 = 67{,}4 \text{ mm.}$$

Das Wellstück BC wird von den an den Rädern C und D wirkenden Kräften auf Verdrehung in Anspruch genommen, mithin ist

$$600 \,.\, 200 + 800 \,.\, 250 = 2 \,.\, \frac{\pi}{16} d_2^3;\ d_2 = 93{,}5 \text{ mm.}$$

Berechne in derselben Weise die Stärke des Wellstücks AB, sowie die Verdrehungswinkel eines jeden einzelnen Wellstücks und der ganzen Welle, wenn AB = 5, BC = 8 und CD = 6 m gegeben sind.

6. Von den drei Rädern, welche auf einer 60 Umdrehungen pro Minute machenden Transmissionswelle sitzen, ist A das treibende Rad, während die Riemenscheiben B und C als getriebene Räder beziehentlich 8 und 6 Pferdestärken auf die Arbeitsmaschinen zu übertragen haben.

a) Welche Durchmesser haben die Wellstücke AB und BC anzunehmen? ($k_2 = 2$). b) Welche Verdrehung erfahren dieselben, wenn AB = 4 m und BC = 7 m ist?

Da das Wellstück AB 8 + 6 = 14 Pferdestärken überträgt, so ist hier (mit Beziehung auf IV. 12. Aufg. 22.)

$$P \,.\, R = 716\,200 \,.\, \frac{14}{60} = M,$$

mithin

$$716\,200 \,.\, \frac{14}{60} = 2 \,.\, \frac{\pi}{16} d_1^3;\ d_1 = 75{,}3 \text{ mm.}$$

Für das Stück BC mit 6 Pferdestärken ergiebt sich $d_2 = 56{,}8$ mm.

VI. Zerknickungsfestigkeit.

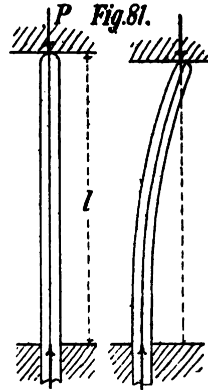
1. Einleitung. Ist ein prismatischer Stab von verhältnissmässig grosser Länge einem Druck in seiner Längsrichtung ausgesetzt, dann wird er seine gerade Form nicht beibehalten, sondern sich biegen und bei hinreichender Vergrösserung des Drucks nicht zerdrückt, sondern zerknickt werden, wie z. B. Kehlbalken, Holzständer etc., die zu schwach genommen sind.

Die letzte Veranlassung zu solcher Durchbiegung ist in zufälligen Umständen wie Erschütterung, ungleicher Beschaffenheit des Materials, seitlichem Druck oder darin zu suchen, dass der Drnck nicht genau in der geometrischen Achse des Stabes wirkt.

Dazu, dass eine Biegung eintritt, ist von vornherein erforderlich ein gewisses Mindestverhältniss der Länge zur kleinsten Querschnittsabmessung, welches Grenzverhältniss für verschiedene Materialien und Querschnittsformen verschiedene Grösse hat, wie unten in 7. erörtert wird. Auf die kleinste Abmessung kommt es an, weil sich der Stab nach dieser Seite am leichtesten biegen kann, z. B. in der Fig. 82. um die Achse AA.

2. Näherungsweise Ableitung der Formeln für den ersten Fall:

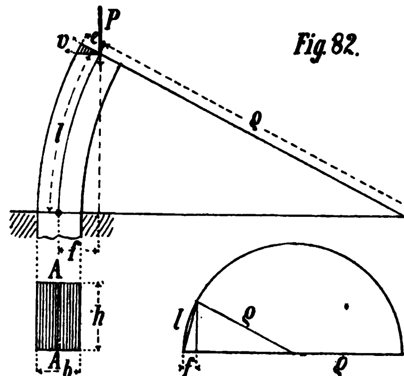
Der Stab von der Länge l cm ist lothrecht unten eingespannt und am oberen Ende durch P kg belastet. Diese Last kann sich seitlich mit dem Ende verschieben, sowie dieses frei beweglich ist. (Fig. 81.)



Ist der Widerstand des Stabes stark genug, so wird die Biegung ein gewisses, übrigens sehr kleines Maass nicht übersteigen. Dieser Gleichgewichtszustand zwischen äusseren und inneren Kräften sei in der Zeichnung (siehe Fig. 82.) dargestellt. Wie man sofort sieht, ist die Veränderung der einzelnen Faserschichten im allgemeinen dieselbe wie bei der Biegungsfestigkeit. Auch hier ist der gefährliche Querschnitt derjenige der Einspannungsstelle, da für ihn der Arm der Last P, mithin auch das Biegungsmoment am grössten ist. Für die Achse AA ist $M = P f$, wo f den Biegungspfeil bedeutet. Im Falle des Gleichgewichts zwischen den äusseren und inneren Kräften an der Stelle der Einspannung ist also nach Gleichung

(18) $$P f = k \cdot \frac{J}{e},$$

wobei J das Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Achse AA, hier z. B. $J = \frac{1}{12} h b^3$, und e den Abstand der äussersten Fasern von AA, hier $\frac{b}{2}$, bedeutet.



Die Grösse des Biegungspfeils, welche höchstens erreicht wird, ist aber verknüpft mit der Verlängerung bez. Verkürzung der äussersten Faserschichten. Um diese Beziehung aufzusuchen, nimmt man den Krümmungsradius ϱ an, ferner die Verlängerung bez. Verkürzung v der äussersten Faserschicht über ihre ursprüngliche Länge l. Diese Verlängerung, durch die zulässige Beanspruchung k kg pro qcm hervorgebracht, ergiebt sich nach I. 6. aus

$$v : l = k : E;$$

ferner aus der Aehnlichkeit der beiden dreieckartigen Figuren

$$\frac{v : l = e : \varrho.}{e : \varrho = k : E.}$$

Hieraus ergiebt sich aber

Wird ferner l, wie es bei der geringen Biegung annäherungsweise geschehen kann, als gerade angesehen, so ist nach bekanntem Satz (siehe die Hilfsfigur zu Fig. 82.)

$$f : l = l : 2\varrho, \text{ woraus } \varrho = \frac{l^2}{2f},$$

welcher Werth, in obige Proportion eingesetzt, ergiebt:

$$e : \frac{l^2}{2f} = k : E \text{ und daraus } f = \frac{k\,l^2}{2eE}.$$

Die Hauptgleichung $P f = k \cdot \frac{J}{e}$ erhält jetzt durch Einsetzen des Werthes für f die Gestalt

$$P \cdot \frac{k\,l^2}{2eE} = k\frac{J}{e}$$

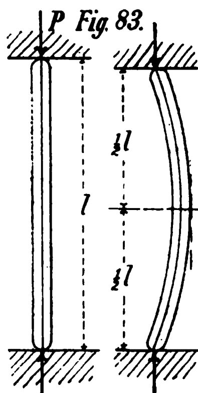
$$P = \frac{2EJ}{l^2}.$$

3. Die Formeln für die vier Fälle der Zerknickungsfestigkeit. Der nur mit Hilfe der Gleichung der elastischen Linie zu erhaltende wahre Ausdruck für die zulässige Belastung P ist für diesen **ersten Fall** (Träger einerseits eingespannt, andererseits durch eine seitlich verschiebbare Last gedrückt; siehe Fig. 81.)

$$P = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{EJ}{l^2} \backsim \frac{5}{2}\frac{EJ}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

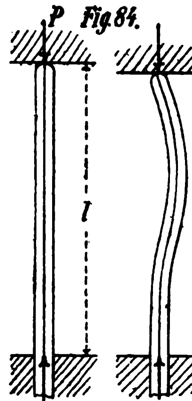
Der bisher angenommene Fall kommt aber in der Wirklichkeit kaum vor. Vielmehr ist die Belastung in der Regel derart, dass sie selbst sich nicht seitlich verschieben kann, sondern in der Stabachse sich senkt. Auch ist gewöhnlich keines von beiden Stabenden als fest eingespannt anzusehen, sondern beide sind beweglich.

Zweiter Fall: Der Träger ist mit beiden Enden frei beweglich und von einer in seiner Längsachse geführten Last P gedrückt. (Fig. 83.)



Er zerlegt sich dann offenbar in zwei gleiche Theile, von denen jeder durch den andern in der gemeinschaftlichen Mitte des Stabes als eingespannt anzusehen ist. Der erste Fall lässt sich daher auf jeden dieser Theile anwenden. Obige Formel ergiebt also durch Einsetzen von $\frac{l}{2}$ an Stelle von l

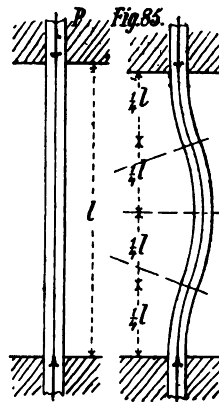
$$P = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{EJ}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \backsim 10\,\frac{EJ}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$



Dritter Fall: Der Träger ist einerseits eingespannt und am andern Ende durch eine in der Stabachse geführte Last gedrückt. (Fig. 84.)

$$P = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{E\,J}{\left(\frac{l}{2\sqrt{2}}\right)^2} \sim 20\,\frac{E\,J}{l^2} \quad . \; . \; . \quad (30)$$

Vierter Fall: Der Träger ist beiderseits eingespannt und durch eine in der Stabachse geführte Last gedrückt. (Fig. 85.)



Hier zerlegt sich die ganze Länge in vier genau gleich gekrümmte Theile, von denen jeder im ersten Falle sich befindet. Wird daher $\frac{l}{4}$ an Stelle von l in Gleichung (28) eingesetzt, so ist

$$P = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{E\,J}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} \sim 40\,\frac{E\,J}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (31)$$

4. Die Formeln für die praktische Berechnung. Die erhaltenen Ausdrücke für die zulässige Belastung sind unter der Voraussetzung erhalten, dass gerade Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften stattfindet. Dies begründet aber noch keine Sicherheit, da auf eine durch Erschütterungen verursachte Bewegung der Last und andere, vom Material abhängige Zufälligkeiten nicht gerechnet ist. Man hat deshalb bei praktischen Berechnungen nur einen Bruchtheil als zulässige Belastung aufzurechnen, allgemein $\frac{1}{n}$, wobei n für Holz 10, Gusseisen 8, Schmiedeeisen 5 gesetzt wird. Die endgiltigen praktischen Formeln sind hiernach:

	I. Fall	II. Fall	III. Fall	IV. Fall
P	$\frac{5}{2}\,\frac{E\,J}{n\,l^2}$	$10\,\frac{E\,J}{n\,l^2}$	$20\,\frac{E\,J}{n\,l^2}$	$40\,\frac{E\,J}{n\,l^2}$
J	$\frac{2\,n}{5\,E}\,P\,l^2$	$\frac{n}{10\,E}\,P\,l^2$	$\frac{n}{20\,E}\,P\,l^2$	$\frac{n}{40\,E}\,P\,l^2$

Betreffs der Frage, welche der vier Einspannungs- und Belastungsweisen im Einzelfall als massgebend anzunehmen ist, hat man zu beachten, dass, wie oben bemerkt, eine seitliche Verschiebung der Belastung bei guter Verankerung nicht anzunehmen, mithin der erste (ungünstigste) Fall in Wirklichkeit nur höchst selten in Rechnung zu ziehen ist. Bei den anderen Fällen ist Einspannung nur dann anzunehmen, wenn das betreffende Ende mit breitem Fuss auf einer unbeweglichen Grundplatte steht und dazu mit Verstärkungsrippen, Fussstreben etc. versehen ist. Der günstigste Fall IV. wird nur da anzunehmen sein, wo die Stütze mit breiter Fuss- und Kopfplatte zwischen starren Mauerkörpern eingespannt und mit denselben fest verankert ist. In der Regel wird man am besten thun, den Fall II. als vorhanden anzunehmen.

Rechnet man in den für J in der letzten Tafel (S. 87.) gegebenen Ausdrücken den Werth des vom Material und von dem Belastungsfall abhängigen Quotienten $\frac{2\,n}{5\,E}$, $\frac{n}{10\,E}$ u. s. f. mit Hilfe von E (für Holz $= 120000$, für Gusseisen $= 1000000$, für Schmiedeeisen $= 2000000$) aus, so kann man sich zur Berechnung von J bei gegebenem P und l folgender praktischer Tafel bedienen: Man hat die in dieser Tafel angegebene Zahl nur mit $P\,l^2$ zu multipliciren. Dabei ist aber die Last P in Tonnen (also 1000 mal so klein), die Länge l in Metern (also 100 mal, l^2 10000 mal so klein) einzusetzen.

Material	Werth des Quotienten, der mit $P\,l^2$ zu multipliciren ist:			
	I. Fall	II. Fall	III. Fall	IV. Fall
Holz	$\frac{1000}{3}$	$\frac{250}{3}$	$\frac{125}{3}$	$\frac{62,5}{3}$
Gusseisen	32	8	4	2
Schmiedeeisen	10	2,5	1,25	0,625

Beispiele.

1. Eine Stütze aus Holz, 4,5 m lang, zum Bau einer Tribüne verwendet, hat die Belastung von 20 qm zu 300 kg aufzunehmen. Unten eingespannt, ist sie oben als seitlich verschiebbar zu betrachten. Dann ist das erforderliche Trägheitsmoment

$$J = \frac{2\,n}{5\,E}\,P\,l^2 = \frac{2\,.\,10\,.\,6000\,.\,450\,.\,450}{5\,.\,120\,000} = 40\,500;$$

nach der Tafel hat man einfacher

$$J = \frac{1000}{3} \cdot 6\,(t) \cdot 4{,}5\,(m) \cdot 4{,}5\,(m) = 40\,500.$$

2. Eine gusseiserne Säule von 3 m Länge, im II. Fall, hat 12000 kg aufzunehmen. Dann ist

$$J = \frac{n}{10\,E}\,P\,l^2 = \frac{8 \cdot 12\,000 \cdot 300 \cdot 300}{10 \cdot 1\,000\,000} = 864;$$

nach der Tafel erhält man sofort

$$J = 8 \cdot 12\,(t) \cdot 3\,(m) \cdot 3\,(m) = 864.$$

5. Ausführung der Berechnung. Hat man nach dem vorigen das erforderliche Trägheitsmoment*) gefunden und daraus unter Berücksichtigung der sonstigen Angaben (ob kreisförmig oder rechteckig, massiv oder hohl etc.) den nöthigen Querschnitt, wie im folgenden gezeigt, ermittelt, so darf man unter keinen Umständen versäumen, denselben auch auf Druckfestigkeit zu prüfen. Soll er bei der Grösse von f qcm wirklich Sicherheit bieten, so muss seine Widerstandsfähigkeit gegen Druck

$$f\,k_1$$

mindestens gleich der gegebenen Belastung P sein.

Beispiele.

1. Für den Tribünenbau in Beispiel 1. unter 4. stehen Hölzer von 20/30 zur Verfügung. Es fragt sich, ob dieselben genügen.

---

*) Anmerkung. Die ganze Berechnung gilt hier ebenso wie bei der Biegungsfestigkeit zunächst für den gefährlichen Querschnitt. Die anderen Querschnitte könnten wegen der Zerknickung schwächer sein und deshalb könnte eine Verjüngung (im Fall II. nach beiden Enden hin) stattfinden. Da aber die Stütze wegen der Zerdrückung in allen Querschnitten gleiche Grösse erfordert, so sind in der Regel auch gegossene Stützen überall gleich stark.

Falls der gefährliche Querschnitt wegen zu grosser Länge des Stabes einen grösseren Querschnitt erhält, als gegen einfachen Druck erforderlich ist, so konstruirt man die Endfläche im I. und III. Fall, beide Endflächen im II. Fall nur auf Zerdrückung und lässt den Querschnitt sich bis dahin in der Weise verjüngen, dass die Seitenlinien des Stabes Kreisbögen oder andere flache Kurven werden, deren Tangenten im gefährlichen Querschnitt der Stabachse parallel sind. Siehe Beispiel 11. unter 8.

Die leichte Schwellung der antiken Säulen ist hervorgegangen aus dem richtigen Gefühl, dass die mittleren Theile des Schaftes am meisten beansprucht sind.

Das Trägheitsmoment ihres Querschnitts ist

$$J = \frac{1}{12} . h\,b^3 = \frac{30 . 20 . 20 . 20}{12} = 20\,000,$$

also zu klein. Bei dem Verhältniss $b : h = 3 : 4$ wären folgende Abmessungen erforderlich:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{3}\, b . b^3 = 40\,500, \text{ woraus } b = 24{,}6 \text{ cm und } h = 32{,}8 \text{ cm.}$$

Bei quadratischem Querschnitt wäre

$$\frac{1}{12}\, a^4 = 40\,500, \text{ woraus } a = 26{,}4 \text{ cm.}$$

Diese Stützen würden gegen Druck folgenden Widerstand leisten können

$$24{,}6 . 32{,}8 . 60 \backsim 48\,400 \text{ und}$$

$$26{,}4 . 26{,}4 . 60 \backsim 41\,800.$$

Beide sind hiernach mehr als reichlich stark gegen Druck.

2. Für obigen Zweck in Beispiel 2. unter 4. soll die gusseiserne Säule cylindrisch und zwar a) voll, b) hohl mit dem äusseren Durchmesser 18 cm sein.

a) Vollsäule.

$$864 = \frac{\pi}{64}\, d^4; \;\; d^4 = 17\,610{,}2; \;\; d = 11{,}6 \text{ cm.}$$

$$f = \frac{\pi}{4} . d^2 = 104{,}405; \;\; f\,k_1 = 104{,}405 . 500 = 52\,200;$$

die Säule von 11,6 cm Durchmesser ist überreichlich stark auf Druck.

b) Hohlsäule. $D = 18$.

$$864 = \frac{\pi}{64}\,(18^4 - d^4); \;\; d^4 = 87\,366; \;\; d = 17{,}2 \text{ cm.}$$

Hiernach wäre die Wandstärke der Hohlsäule nur 4 mm. Eine solche ist aber technisch (des Giessens wegen) unausführbar und giebt auch nur annähernd Sicherheit auf Druck; denn

$$f = \frac{\pi}{4}\,(18^2 - 17{,}2^2) \backsim 22{,}1, \text{ mithin } f . k_1 = 11050 \text{ gegen } 12000 \text{ Soll.}$$

Für $D = 16$ würde man erhalten;

$$d^4 = 47\,926; \;\; d = 14{,}7.$$

Mithin wird die Drucksicherheit mit $\backsim$ 15 600 vollkommen erreicht; dagegen ist die Wandstärke 6,5 mm unausführbar.

Bei $D = 13$ cm ergiebt sich $d = 10{,}2$ und damit eine Säule von fast 15 mm Wandstärke, welche nach dem vorhergehenden gegen Druck reichlich stark ist ($f \backsim 51$ qcm).

Aus dem Vorstehenden ergeben sich folgende wichtige Betrachtungen über den Werth der Hohlsäulen.

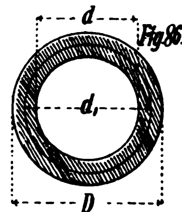
Während die Vollsäule von 11,6 cm Durchmesser einen Querschnitt von 104 qcm erfordern würde, wendet man nunmehr eine Hohlsäule von 13 cm äusserem Durchmesser mit nur 51 qcm, also weniger als halb. so grossem Querschnitt an. Die erstere könnte gegen Druck mehr als das Vierfache leisten, letztere immer noch mehr als das Doppelte von der verlangten Tragfähigkeit. Eine weitere Verringerung des Querschnitts, wie sie z. B. die gegen Zerknickung sichere Hohlsäule von 16 cm mit ihren 29 qcm, und zwar unter genügender Widerstandsfähigkeit gegen Druck, ergeben würde, verbietet sich nur durch die unausführbare Wandstärke von 6,5 mm.

Im vorliegenden Fall wird also durch Anwendung einer Hohlsäule über die Hälfte an Eisen gespart, und so werden die Kosten wie auch das Gewicht verringert.

6. Näherungsformel für die Hohlsäule. Wie aus der letzten Erörterung ersichtlich, ist bei der Berechnung der Umstand wohl zu berücksichtigen, dass die Wandstärke w nicht unter einen gewissen Grenzwerth (15 mm) herabsinken darf. Führt man aus diesem Grund w in den Ausdruck für das Trägheitsmoment ein, so ergiebt sich

$$J = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4}[(r + w)^4 - r^4] = \frac{\pi}{4}(4r^3w + 6r^2w^2 + 4rw^3 + w^4),$$

also eine Gleichung, welche in Bezug auf die gesuchte Grösse r vom dritten Grad ist. Um eine solche zu vermeiden, bedient man sich mit Vortheil einer näherungsweisen, aber hinreichend genauen Rechnung.



$$J = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4);$$

$$J = \frac{\pi}{64}(D^2 - d^2)(D^2 + d^2) = \frac{\pi}{64}(D - d)(D + d)(D^2 + d^2).$$

Führt man nun den mittleren Durchmesser d_1 (von der Mitte der Wandstärke bis wieder zur Mitte) ein, so ist $D + d = 2\,d_1$; ferner ist $D - d = 2\,w$ und $D^2 + d^2 + 2\,D\,d = 4\,d_1^2$, oder wenn annähernd $2\,D\,d = 2\,d_1\,d_1 = 2\,d_1^2$ gesetzt wird, $D^2 + d^2 = 2\,d_1^2$. Hieraus folgt annähernd

$$J = \frac{\pi}{64} \cdot 2\,w \cdot 2\,d_1 \cdot 2\,d_1^2 \text{ oder}$$

$$J = \frac{\pi}{8}\,w\,d_1^3 = 0{,}3927\,w\,d_1^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Für das obige Beispiel würde man bei Annahme von 14 mm Wandstär[illegible] sofort folgendes erhalten haben:

$$[illegible]927 \cdot 1{,}4 \cdot d_1^3;\ d_1^3 = 1571{,}5;\ d_1 = 11{,}63 \text{ cm},$$

mithin $D = 11{,}63 + 1{,}4 = 13{,}03$ cm und $d = 11{,}63 - 1{,}4 = 10{,}23$ cm, welche Werthe mit den oben so weitläufig gefundenen gut übereinstimmen.

Noch bequemer ergeben sich die erforderlichen Maasse aus folgender Tafel VIII., welche sich u. a. im Deutschen Baukalender (Beigabe) in grösserem Umfang findet. Daselbst sind die Werthe von f und J für qcm, von d bez. D in cm, die Wandstärken in mm gegeben.

Anmerkung Wenn statt der Wandstärke das Höhlungsverhältniss $\frac{d}{D}$ (gewöhnlich $= 0{,}7$ bis $0{,}8$) gegeben ist, hat man für obiges Beispiel folgende Rechnung:

$$864 = \frac{\pi}{64}\left[D^4 - (0{,}8\,D)^4\right] = \frac{1{,}57}{32}\left(D^4 - 0{,}4096\,D^4\right) = \frac{1{,}57}{32} \cdot 0{,}5904\,D^4$$

$$D^4 \backsim 29\,800;\; D = 13{,}2;\; d = 10{,}5.$$

Tafel VIII. über Trägheitsmoment J und Querschnittsfläche f runder Säulen.

d bez. D	Vollsäulen f	Vollsäulen J	Hohlsäulen mit einer Wandstärke von 15 mm f	15 mm J	20 mm f	20 mm J	25 mm f	25 mm J	30 mm f	30 mm J
10	78,54	491	40,06	372	50,27	427	58,90	460	65,97	478
11	95,03	719	44,77	518	56,55	601	66,76	655	75,40	688
12	113,10	1 018	49,48	696	62,83	817	74,61	900	84,82	954
13	132,73	1 402	54,19	911	69,12	1080	82,47	1201	94,25	1 284
14	153,94	1 886	58,90	1167	75,40	1395	90,32	1564	103,67	1 685
15	176,71	2 485	63,62	1467	81,68	1766	98,17	1994	113,10	2 163
16	201,06	3 217	68,33	1815	87,96	2199	106,03	2498	122,52	2 726
17	226,98	4 100	73,04	2214	94,25	2698	113,88	3082	131,95	3 381
18	254,47	5 153	77,75	2668	100,53	3267	121,74	3751	141,37	4 135
19	283,53	6 397	82,47	3180	106,81	3912	129,59	4511	150,80	4 995
20	314,16	7 854	87,18	3754	113,10	4637	137,44	5369	160,22	5 968
21	346,36	9 547	91,89	4394	119,38	5447	145,30	6330	169,65	7 062
22	380,13	11 499	96,60	5102	125,66	6346	153,15	7399	179,07	8 282
23	415,48	13 737	101,32	5883	131,95	7340	161,01	8584	188,50	9 637
24	452,39	16 286	106,03	6739	138,23	8432	168,86	9889	197,92	11 133
25	490,87	19 175	110,74	7676	144,51	9628	176,71	11321	207,35	12 778

7. Das Grenzverhältniss der Länge zur kleinsten Querschnittsabmessung, über welches hinaus erst auf Zerknickung zu rechnen ist, ergiebt sich für den gewöhnlichsten Fall II. aus folgendem:

So lange die Stütze verhältnissmässig kurz ist, leistet sie gegen Zerknickung einen unmessbar grossen Widerstand, während ihre Tragfähigkeit auf einfachen Druck nach den erörterten Massgaben zu ermitteln ist. Wird sie so schlank, dass eine Biegung eintreten

kann, dann ist ihr Widerstand geschwächt: Die Zerknickungsbelastung **ist dann** kleiner als die Zerdrückungsbelastung. Dasjenige Verhältniss, **bei dem** beide gleich sind, wird die Grenze zwischen beiden Be**anspruchungen** angeben. Man setze daher beide Belastungen gleich.

$$f\,k_1 = \frac{10\,E\,J}{n\,l^2}.$$

Für Gusseisen und vollkreisförmigen Querschnitt ist **nun** $k_1 = 500$, $E = 1\,000\,000$, $J = \frac{\pi}{64}\,d^4$, $n = 8$; mithin

$$\frac{\pi}{4}\,d^2 \,.\, 500 = \frac{10 \,.\, 1\,000\,000 \,.\, \pi\,d^4}{64 \,.\, 8 \,.\, l^2}$$

$$\left(\frac{l}{d}\right)^2 = \frac{10\,000}{64}$$

$$\frac{l}{d} = \frac{100}{8} = 12{,}5.$$

Für Gusseisen und hohlkreisförmigen Querschnitt (Höhlungsverhältniss $d : D = \alpha$) erhält man ebenso

$$\frac{\pi}{4}\,[D^2 - (\alpha\,D)^2] \,.\, 500 = \frac{10 \,.\, 1\,000\,000 \,.\, \pi\,[D^4 - (\alpha\,D)^4]}{64 \,.\, 8 \,.\, l^2},$$

woraus schliesslich $\left(\frac{l}{D}\right)^2 = \frac{10\,000}{64}\,(1 + \alpha^2).$

Für $\alpha = 0{,}8$ wird $\frac{l}{D} = \frac{100}{8}\sqrt{1{,}64} = 12{,}5 \,.\, 1{,}28$

$$\frac{l}{D} \sim 16.$$

Für Holz und rechteckigen Querschnitt b/h $(b : h < 1)$ ist, wenn $k_1 = 70$, $E = 120\,000$, $n = 10$ und $J = \frac{1}{12}\,h\,b^3$ gesetzt **wird,**

$$b\,h \,.\, 70 = \frac{10 \,.\, 120\,000 \,.\, h\,b^3}{12 \,.\, 10 \,.\, l^2}$$

$$\left(\frac{l}{b}\right)^2 = \frac{1000}{7} \sim 143$$

$$\frac{l}{b} \sim 12.$$

Gieb die Grenzverhältnisse für denselben Fall II. bei Eisen und quadratischem, sowie bei Holz und rundem Querschnitt an; ferner für Fall III. bei Eisen und Holz etc.!

Sobald bei einer gegebenen Stütze etc. das betreffende Grenzverhältniss nicht überschritten ist, hat man bei der Berechnung ihrer Tragfähigkeit am einfachsten die Druckformel Gleichung (11) anzuwenden.

Ferner: Findet man für eine gegebene Belastung etc. einen Querschnitt, bei welchem das betreffende Grenzverhältniss nicht überschritten wird, so braucht man auf Sicherheit gegen Druck nicht weiter Rücksicht zu nehmen.

8. Beispiele für die Berechnung der Zerknickungsfestigkeit.

1. Ein rechteckiger Ständer aus Föhrenholz, 4 m hoch, Querschnitt 18/30, ist beiderseits unverstrebt. Welche Belastung kann er aufnehmen?

$$P = 10 \frac{E J}{n l^2}; \; J = \frac{1}{12} . 30 . 18^3; \; P = 10\,935 \text{ auf Zerknickung.}$$

$$P_1 = f . k_1 = 18 . 30 . 60 = 32\,400 \text{ auf einfachen Druck.}$$

Der Ständer kann nur 10 935 sicher tragen. Wäre er nicht länger als etwa (18 . 12) cm = 2,16 m, so würde er, nach den Ausführungen in 7., 32 400 aufnehmen können.

2. Ein Ständer wie bei 1. von demselben Inhalt, aber gleichseitigem Querschnitt, Geviertseite also $= \sqrt{18 . 30}$.

$$J = \frac{1}{12} \cdot (\sqrt{18 . 30})^4; \; P = 18\,225 \text{ auf Zerknickung.}$$

Tragfähigkeit auf Druck wie oben = 32 400.

Hiernach hat bei gleichem Material der quadratische Ständer bedeutend grössere, etwa 1,67 mal so grosse Tragfähigkeit, nämlich 18 225 gegen 10 935. Daraus ergiebt sich, wie vortheilhaft bei Stützen, Säulen etc. eine nach allen Seiten möglichst gleiche Form des Querschnitts ist.

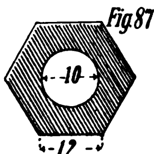
3. Zur Aufnahme eines Drucks von 24 000 ist eine 3,2 m hohe Stütze aus Eichenholz einzurichten, welche unten in gusseisernem Schuh fest verbolzt ist. Welche Geviertseite hat sie anzunehmen?

$$J = \frac{P n l^2}{20 E}; \; a = 8 \sqrt[4]{30} = 8 . 2{,}35 \backsim 18{,}8 \text{ cm.}$$

Mit Hilfe der Tafel S. 88. wäre $\frac{1}{12} a^4 = \frac{125}{3} . 24 . 3{,}2 . 3{,}2$ und daraus ebenso $a = 8 . \sqrt[4]{30}$ gewesen.

Auf Druck ist diese Stütze auch gerade stark genug, da $f \backsim 350$ qcm und $f k_1 = 350 . 70 = 24500$ ist.

4. Welcher Druckbelastung darf eine 2,4 m hohe sechskantige ausgebohrte Stütze aus Föhrenholz von nebenstehendem Querschnitt ausgesetzt werden?



$$J = 0{,}5413 . 12^4 - \frac{3{,}14}{64} . 10^4 \backsim 10734;$$

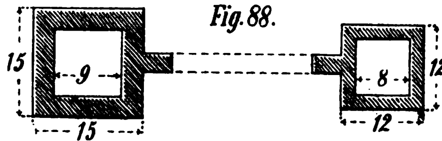
$$P \backsim 22\,363 \text{ auf Zerknickung;}$$

$$P_1 = (2{,}598 . 12^2 - 3{,}14 . 5^2) . 60 \backsim 17\,740 \text{ auf einfachen Druck.}$$

Die Stütze darf nur mit 17 740 kg belastet werden.

5. Es ist die Tragfähigkeit einer durchbrochenen Gusswand von beistehenden Abmessungen zu ermitteln, wenn dieselbe bei 4 m freier Länge unten verstrebt angenommen werden darf.

Für die Berechnung von J brauchen nur die beiden Hohlgevierte berücksichtigt zu werden, da die Stege fast nichts zum Widerstand gegen Zerknickung beitragen.



$$J = \frac{1}{12}(15^4 - 9^4) + \frac{1}{12}(12^4 - 8^4) = 5058{,}7;$$

$$P = \frac{20 \,.\, 1\,000\,000 \,.\, 5058{,}7}{8 \,.\, 400 \,.\, 400} \backsim 79\,042 \text{ auf Zerknickung;}$$

$P_1 = 112\,000$; folglich ist die Tragfähigkeit $\backsim$ 79 000.

6. Eine Hohlsäule (Gusseisen), 4,8 m lang, hat 20 cm äusseren Durchmesser und 3 cm Wandstärke. Sie ist einerseits mit Verstärkungsrippen versehen. Welche Tragfähigkeit besitzt sie?
$P = 64\,727$; nach der Näherungsformel 62 800 (auf Zerknickung).
$P_1 = 80\,070$ (auf einfachen Druck).

Die Trägfähigkeit ist danach $\backsim$ 64 700. Wieviel nach Tafel VIII?

7. Welchen Durchmesser d hat die schmiedeeiserne Kolbenstange eines Dampfcylinders anzunehmen, dessen innerer Durchmesser = 450 mm ist, wenn der nützliche Dampfdruck (Unterschied der Dampfdrücke vor und hinter dem Kolben) 4 Atm. und die grösste Länge der Stange ausserhalb der Stopfbüchse 900 mm beträgt? (1 Atm. = 1,033 kg pro qcm).

Da die Stange abwechselnd auf Zug und auf Druck in Anspruch genommen wird, so ist sie sowohl auf Zug- als auf Zerknickungsfestigkeit zu berechnen. Der grössere von beiden erhaltenen Werthen ist dann der verlangte.

$$\text{Kolbenfläche} = \pi \,.\, r^2 \backsim 1590 \text{ qcm,}$$
$$\text{Dampfdruck} = 1590 \,.\, 4 \,.\, 1{,}033 \backsim 6570 \text{ kg.}$$

a) Auf Zugfestigkeit hat man ($k = 5$ pro 1 qmm)

$$6570 = \frac{\pi}{4} \,.\, d^2 \,.\, 5,$$

$$d = \sqrt{1674} = 40{,}9 \backsim 41 \text{ mm.}$$

b) Zur Berechnung auf Zerknickungsfestigkeit ist die Stange einerseits, nämlich durch ihre Befestigung am Kolben und ihre Füh-

rung in der Stopfbüchse, als eingespannt und andererseits als geradlinig geführt zu betrachten; mithin ist

$$P = 20 \,.\, \frac{E\,J}{n\,l^2}, \text{ wobei } n = 25 \text{ gesetzt wird.}$$

$$6570 = \frac{20 \,.\, 20\,000 \,.\, 3{,}14 \,.\, d^4}{25 \,.\, 900 \,.\, 900 \,.\, 64},$$

woraus $d = \sqrt[4]{6\,780\,000} = \sqrt{2604} \sim 52$ mm.

Die Stange hat hiernach den Durchmesser 52 mm anzunehmen.

8. Die gusseiserne Säule aus Beispiel 3. S. 27. ist auf Zerknickung einzurichten, und zwar für die beiden dort angegebenen Querschnittsformen, a) Flügelsäule $b : h = 1 : 8$ und b) Hohlsäule $w = 1{,}8$ cm.

Das erforderliche Trägheitsmoment ergiebt sich mit Hilfe der Tafel auf S. 88.

$$J = 8 \,.\, 30 \,.\, 2{,}5 \,.\, 2{,}5 = 1500.$$

a) Für die Flügelsäule ist aber

$$J = \frac{1}{12}\,[x\,(8\,x)^3 + 7\,x \,.\, x^3] = \frac{519}{12}\,x^4;$$

mithin $x = 2{,}43;\ 8\,x = 19{,}44.$

b) Für die Hohlsäule ist mit Hilfe der Näherungsformel (32)

$$1500 = 0{,}3927 \,.\, 1{,}8\, d_1^{\,3},$$

woraus $d_1 = \sqrt[3]{2122} \sim 12{,}9$

und $D = 14{,}7$ cm, $d = 11{,}1$ cm

sich ergeben. Da nach der Berechnung S. 27. die gegen Zerdrückung erforderlichen Maasse kleiner sind als die jetzt gefundenen, so hat man für a) $b = 2{,}4$ cm und $h = 20$ cm, für b) 14,7 cm als äusseren Durchmesser bei 18 mm Wandstärke anzuordnen.

9. Eine Belastung von 20 000 soll von einer 3,6 m hohen, gusseisernen Stütze aufgenommen werden; 1) voll, 2) hohl mit dem Höhlungsverhältniss 0,7, 3) hohl mit der Wandstärke 20 mm.

1) $d = 14{,}4$; 2) $D = 15{,}4$, $d = 10{,}8$, also $w = 23$ mm; 3) $D = 15{,}9$, $d = 11{,}9$.

Um nach Tafel VIII. die Fragen 1. und 3. zu beantworten, findet man, nach Berechnung von $J = 2073{,}6$ zu 1. für $J = 2170$ den Durchmesser $d = 14{,}5$, wozu $f = 165{,}13$ qcm. Ferner zu 3. für $J = 2199$ $D = 16$, wozu $f = 87{,}96$ qcm.

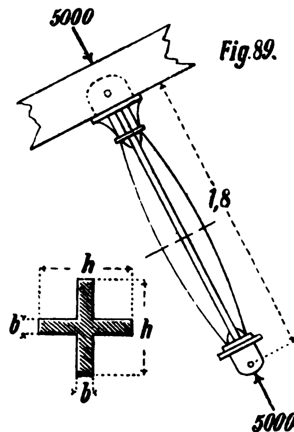
Die Hohlsäule, welche auch gegen Zerdrückung sicher, da $88 \,.\, 500 = 44\,000$ ist, giebt daher eine Ersparniss von fast der Hälfte.

10. Für denselben Zweck wie bei 9. ist eine gegossene Flügelsäule herzustellen, $h = 18$. Wie stark wäre b zu nehmen? (Siehe den Querschnitt in Fig. 89.)

$$J = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} (h - b) b^3.$$

Näherungsweise kann der zweite Summand weggelassen werden, da er, wie man sich überzeugen kann, sehr klein ist. Dann ist $\frac{1}{12} b h^3 = 2074$; daraus $b = 4{,}3$. Um wieviel ist das Trägheitsmoment dieses berechneten Querschnitts, genau gerechnet, grösser als erforderlich?

11. Eine Strebe von 1,8 m freier Länge ist einer Druckspannung von 5000 kg ausgesetzt. Dieselbe ist aus Gusseisen von kreuzförmigem Querschnitt ($b : h = 1 : 6$) zu konstruiren.



Welche Abmessungen hat der Querschnitt in der Mitte anzunehmen?

$$J = \frac{221}{12} b^4;\ P = \frac{10 E J}{n l^2};\ b^4 = \frac{72^2 . 3}{2210};$$

$b \backsim 1{,}6$ cm; $h \backsim 9{,}8$ cm.

Nach den Enden hin kann die Strebe sich verjüngen; man rechnet angenähert, bei gleichbleibender Breite, die Höhe am Ende $= 0{,}7\,h$, also hier $h_1 \backsim 6{,}8$ cm. Diese Endquerschnitte müssen nur stark genug sein, um den einfachen Druck aushalten zu können. Solches ist, wie man sich überzeugen mag, bei $b = 1{,}6$ und $h = 6{,}8$ reichlich der Fall.

Ueber die Form der Schwellung vergleiche die Anmerkung auf S. 89.

12. Ein Kehlbalken, 3,6 m lang, ist einem beiderseitigen Druck von 2000 ausgesetzt. Wie gross ist seine Geviertseite zu nehmen? —

$$a = \sqrt[4]{25\,920} = \sqrt{161} \backsim 12{,}7.$$

Soll ein Zangenpaar aus Drittel-Hölzern angeordnet werden, so erhält man für jedes Holz $J = \frac{1}{12} . 3\,b . b^3 = \frac{1}{4} b^4$, und da $P = 1000$ ist, $b = \sqrt[4]{4320} = \sqrt{65{,}8} \backsim 8{,}2$; $h = 24{,}3$. Letztere Konstruktion ist wegen der grösseren Sicherheit gegen Durchbiegung vorzuziehen.

13. Bei einem einfachen Hängewerk, welches ausserdem zur Unterstützung eines $\frac{1}{3}$ Daches bestimmt ist, hat der Kopf der Säule

durch den Zug in dieser letzteren und durch die Firstpfette einen Gesammtdruck = 13 870 aufzunehmen und überträgt denselben auf die beiden Streben. Spannweite des Hängewerks = 9 m, Höhe der Säule 3 m. Welche Geviertseite haben die Streben anzunehmen?

Länge der Strebe $= 3 \cdot \sqrt{3{,}25} \backsim 5{,}4$; Druck in der Strebe $\backsim 12500$;

$$a = \sqrt[4]{364500} = \sqrt{604} \backsim 24{,}6.$$

Gegen Zerdrückung ist der Querschnitt f = 604 auch stark genug, da 604 . 60 = 36 240 ist.

Auf Biegung ist die Strebe ausserdem zu berechnen, wenn eine Mittelpfette vorhanden ist.

14. Der Fussboden eines Saales, 6 m / 16 m (Totalbelastung pro qm 800), wird von 6 m langen Balken gebildet, welche in der Mitte von ⌶ trägern unterfangen sind. Die Säule in der Mitte steht unter dem Stoss der beiden Träger; sie ist 5 m lang. Welche Abmessungen hat man derselben zu geben?

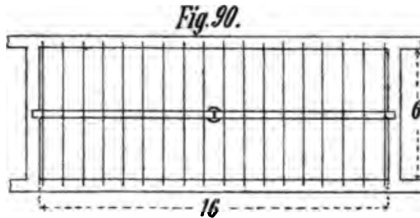


Fig. 90.

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{8} \cdot 48 \cdot 800\right) = 24\,000; \; J = 4800.$$

Nach Tafel VIII. eignet sich hierzu eine Säule D = 22, w = 15 mm, für welche J = 5102 und f = 96,6 angegeben ist. Dieselbe ist auch reichlich stark gegen Druck, da 96,6 . 500 = 48 300 ist.

Berechne ferner 1) die Abmessungen der Balken (b : h = 1 : 2) und das erforderliche Profil für jeden der beiden 8 m langen Träger; 2) im Falle 8 m lange Balken der Länge nach und auf einen in der Längenmitte durchgehenden 6 m langen Unterzug aufgelegt werden sollen, das Profil dieses Trägers und die Abmessungen einer in der Mitte stehenden Hohlsäule.



Anhang A.

I. Tafel der den Berechnungen zu Grunde zu legenden Gewichte.

a) Specifische Gewichte, Wasser = 1, (abgerundete Mittelwerthe).

Asphalt	1,1	Kalk, gebrannt	1,3
Basalt	2,9	Kalkmörtel, frisch b. trocken	1,8—1,6
Bimsstein	0,92	Kalkstein	2,6
Blei	11,3	Kork	0,24
Buchenholz (Rothbuche),		Kreide	1,8—2,6
frisch . .	1	Kupfer	8,8
desgl. lufttrocken	0,7	Lehm, frisch bis trocken .	2,5—1,5
Cement, lose (Portland) . .	1,4	Marmor	2,7
Dachschiefer	2,7	Mauerstein, porös . . .	0,95
Dolomit	2,9	desgl. gewöhnlich .	1,5—2
Eichenholz, frisch	1	desgl. Klinker . . .	1,5—2,3
desgl. lufttrocken . .	0,8	Mauerwerk, gewöhnlich .	1,6
Eis bei 0°	0,93	Messing	8,3
Erde (Damm- bis Gartenerde)	1,4—2,4	Porphyr	2,8
Fichtenholz (Rothtanne),		Sand trocken, fein . . .	1,5
frisch . .	0,9	desgl. grobkörnig . .	1,4
desgl. lufttrocken	0,45	desgl. feucht	1,9
Föhrenholz (Kiefer), frisch .	0,9	Sandstein	2,3
desgl. lufttrocken	0,6	Schmiedeeisen (Stabeisen) .	7,8
Getreide (Roggen- oder Wei-		Schnee, locker	0,13
zenschüttung)	0,75	Stahl	7,7
Glas, gewöhnliches . . .	2,5	Steinkohle	1,3
desgl. Bleiglas	3,8	desgl. in Massen . . .	0,75
Granit	2,8	Weisstannenholz, frisch .	0,9
Gusseisen	7,2	desgl. lufttrocken . .	0,6
Gussstahl	7,9	Zink	7,2
Gyps, gebrannt	1,8	Zinn	7,3

b) Absolute Gewichte pro cbm in kg (Berliner Baupolizei).

Asphalt	1120	Roggenschüttung . . .	650
Basalt	3200	Sand oder Kies, trocken .	1525
Dammerde gew., feucht . .	1650	desgl. feucht	1860
Eichenholz	800	Sandstein	2400
Eis	910	Schmiedeeisen	7800
Granit	2700	Steinschotter	1620
Gusseisen	7200	Steinkohlen	1280
Kalkstein	2370	Torf	550
Kiefernholz	650	Ziegelmauerwerk, gew. .	1600
Lehm, trocken	1460	desgl. aus porösen oder	
desgl. stark durchnässt .	1860	Lochsteinen . .	950
Marmor	2700	Schneelast in max., pro qm	75

II. Tafel der massgebenden Belastungen.

A. Mauerwände. Gewicht pro qm Ansichtsfläche, in kg.

Nr.	Art der Mauer (1 Stein = 25 cm, 1/2 Stein = 12 cm)	Totalgewicht
1.	Fachwerk mit Ziegelstein, 1/2 Stein stark	220
2.	desgl. 1 Stein stark	280
	Massives Mauerwerk in gewöhnlichem Ziegelstein,	
3.	1 Stein stark	460
4.	desgl. 1 1/2 Stein stark	670
5.	desgl. 2 Stein stark	880
6.	desgl. 2 1/2 Stein stark	1100
7.	desgl. 3 Stein stark	1300

Bei Anwendung von Hohlsteinen oder porösen Steinen sind die Zahlen mit 0,6, von Sandsteinen mit 1,3 zu multipliciren.

B. Zwischendecken.

a) Eigengewicht der Zwischendecken pro qm in kg.

Nr.	Art der Decke	Eigengewicht
	1. Hölzerne Zwischendecken:	
	(Balken v. M. z. M. 0,9 bis 1,2 m, Balkenstärke 20/25 bis 25/30 cm.)	
8.	Balken mit einfachem Fussboden	60—80
9.	Balken mit doppeltem Fussboden	100
10.	Einfache Kasettendecke, ohne Stuck	120—140
11.	desgl. mit halbem Windelboden und Stuck	280—380
12.	Gestreckter Windelboden mit Lehm	200—230
13.	Halber Windelboden	250—350
14.	Ganzer Windelboden	350—450
	2. Steinerne (flache gewölbte) Zwischendecken:	
15.	Ziegelmauerwerk 1/4 Stein stark mit Hintermauerung, zwischen Trägern, bis 1,5 m Spannweite, einschliesslich Putz und Fussboden . . .	300
16.	desgl. 1/2 Stein stark, in porösen Steinen, sonst wie 15.	130
17.	desgl. 1/2 Stein stark, sonst wie 15.	400
18.	desgl. 1/2 Stein stark, für 2 — 3 m Spannweite, sonst wie 15.	500
19.	desgl. 1 Stein stark, sonst wie 18.	650
	3. Wellblechdecken:	
20.	Mit Bétonunterlage (13 cm stark)	250—350

b) Nutzlast der Zwischendecken pro qm in kg.

21.	Wohnräume und Werkstätten mit leichten Maschinen	150—200
22.	Tanzlokale, Heu- und Fruchtböden	300—450
23.	Salzspeicher	600
24.	Kaufmannsspeicher	750
25.	Werkstätten mit schweren Maschinen	500—700
26.	Menschengedränge	400

c) T[illegible] der Zwischendecken pro qm in kg.

Nr.	Art der Decke	Totalgewicht
	1. Hölzerne Decken:	
27.	Balkendecke, mit einfacher Dielung	280
28.	desgl. mit halbem Windelboden	500
29.	desgl. mit ganzem Windelboden	600
30.	desgl. für Fruchtböden, Tanzlokale und Werkstätten	700
31.	desgl. für Salzspeicher	800
32.	desgl. für Kornspeicher	850
	2. Gewölbte Decken zwischen eisernen Trägern:	
33.	Spannweite bis 1,5 m, 1/4 Stein stark	500
34.	desgl. 1/2 Stein stark	600
35.	Spannweite 2—3 m, 1/2 Stein stark	700
36.	desgl. 1 Stein stark	1150
37.	Decke für Durchfahrten oder Hofräume	1000
	3. Wellblechdecken zwischen eisernen Trägern:	
38.	Für Wohnhausbelastung	450
39.	Für Fabriken etc.	850

C. Dachkonstruktionen. Gewicht pro qm Grundrissfläche, in kg.

a) Eigengewicht. (Höhe des Daches = h, Spannweite = s)

Nr.	Art des Daches	h : s = 1/2	1/3	1/4	1/5	1/6—1/10	1/32—1/48
40.	Ziegeldach, einfach	144	122	114	—	—	—
41.	desgl. doppelt	188	152	142	—	—	—
42.	Schieferdach, gewöhnl.	108	91	85	82	—	—
43.	Asphaltdach, mit Lehmunterlage	106	90	84	81	78	—
44.	desgl. mit Fliesenunterlage	141	120	112	108	104	—
45.	Strohdach	230	200	—	—	—	—
46.	Theerpappendach	42	36	34	32	31	—
47.	Zink- oder Eisenblech	56	48	45	43	41	—
48.	Glas auf Winkeleisen	71	60	56	54	—	—
49.	Holzcementdach auf Holz	—	—	—	—	—	164—180

b) Totalbelastung, d. i. Eigengewicht mit Schnee- und Winddruck, pro qm Grundrissfläche in kg.

Nr.	Art des Daches	h : s = 1/2	1/3	1/4	1/5	1/6—1/10	1/32—1/48
50.	Ziegeldach, einfach	260	230	220	—	—	—
51.	desgl. doppelt	290	260	240	—	—	—
52.	Schieferdach, gewöhnl.	240	210	190	180	—	
53.	Asphaltdach, mit Lehmunterlage (mit Fliesen ca. 10 Proc. mehr	240	210	190	180	175	—
54.	Stroh- und Rohrdach	230	200	—	—	—	
55.	Theerpappendach	200	170	160	150	140—135	—
56.	Zink- oder Eisenblech	200	170	160	150	140—135	—
57.	Holzcementdach auf Holz	—	—	—	—	—	250

Die Zahlen sind dem Buche: „Hilfswissenschaften zur Baukunde“ entnommen.

III. Tafel über Querschnitt, Widerstandsmoment, Gewicht etc.

der

gewalzten I Träger.

Höhe h mm, Flanschenbreite b mm, Stegdicke d mm.
Querschnitt f qcm, Gewicht pro lfd. m G kg.
Trägheitsmoment J und Widerstandsmoment W bezogen auf cm.

a) **Profile der Gutehoffnungshütte,** Aktien-Verein für Bergbau und Hüttenbetrieb zu **Oberhausen 2,** Rheinland.

Sämmtliche Profile sind deutsche Normalprofile. — Sämmtliche Profile werden in **Flusseisen (k = 1000)** gewalzt. In **Schweisseisen (k = 850)** sämmtliche mit Ausnahme von 38 und 40.

Lfd. Nr.	Nr. des Hüttenwerks	Abmessungen in mm h	b	d	Gewicht pro lfd. m in kg	Querschnitt in qcm	Trägheitsmoment für cm	Widerstandsmoment für cm
1	8	80	42	3,9	6,0	7,61	78,4	19,6
2	9	90	46	4,2	7,1	9,05	118	26,2
3	10	100	50	4,5	8,3	10,69	172	34,4
4	11	110	54	4,8	9,6	12,36	241	43,8
5	12	120	58	5,1	11,1	14,27	331	55,1
6	13	130	62	5,4	12,6	16,19	441	67,8
7	14	140	66	5,7	14,3	18,35	579	82,7
8	15	150	70	6,0	16,0	20,50	743	99
9	16	160	74	6,3	17,9	22,90	945	118
10	17	170	78	6,6	19,8	25,40	1 177	139
11	18	180	82	6,9	21,9	28,00	1 460	162
12	19	190	86	7,2	24,0	30,70	1 779	187
13	20	200	90	7,5	26,2	33,70	2 162	216
14	21	210	94	7,8	28,5	36,60	2 587	246
15	22	220	98	8,1	31,0	39,80	3 090	281
16	23	230	102	8,4	33,5	42,90	3 642	317
17	24	240	106	8,7	36,2	46,40	4 288	357
18	26	260	113	9,4	41,9	53,70	5 798	446
19	28	280	119	10,1	47,9	61,40	7 658	547
20	30	300	125	10,8	54,1	69,40	9 888	659
21	32	320	131	11,5	61,0	78,20	12 622	789
22	34	340	137	12,2	68,0	87,20	15 827	931
23	36	360	143	13,0	76,1	97,50	19 766	1098
24	38	380	149	13,7	83,9	107,50	24 208	1274
25	40	400	155	14,4	92,3	118,30	29 446	1472

Die übrigen in diesem Verzeichnisse nicht vorhandenen, sonst fast überall gewalzten Deutschen Normalprofile sind folgende:

Lfd. Nr.	Nr. des Hüttenwerks	Abmessungen in mm h	b	d	Gewicht pro lfd. m in kg	Querschnitt in qcm	Trägheitsmoment für cm	Widerstandsmoment für cm
26	42½	425	163	15,3	103,7	132,97	37 266	1753,7
27	45	450	170	16,2	115,2	147,65	46 204	2053,5
28	47½	475	178	17,1	127,6	163,61	56 912	2396,3
29	50	500	185	18,0	140,5	180,18	69 245	2769,8

b) **Profile** der Luxemburger Bergwerks- und Saarbrücker Eisenhütten-Aktien-Gesellschaft, **Burbacher Hütte** bei Saarbrücken.

Als zulässige Spannung pro qcm wird bei Konstruktionen, welche nennenswerthen **Erschütterungen** nicht ausgesetzt sind, **k = 1000**, in anderen Fällen **= 750 bis 800** gerechnet.

Lfd. Nr.	Nr. des Hütten-verzeichnisses	Abmessungen in mm			Gewicht pro lfd. m in kg	Querschnitt in qcm	Trägheitsmoment für cm	Widerstandsmoment für cm
		h	b	d				
30	**1 a**	78,5	78,5	6,5	13,0	16,80	169,9603	43,302
31	**1 b**	77	78	7	13,9	17,90	168,9457	43,882
32	**1 c**	75	83	8	16,0	20,70	182,0362	48,543
33	**2**	80	42	3,9	5,9	7,61	78,4840	19,621
34	**3**	80	50	8	12,4	16,00	197,6645	35,939
35	**4**	80	52	10	13,7	17,60	200,2364	38,507
36	**5**	90	46	4,2	7,0	9,05	117,9315	26,207
37	**6 a**	100	50	5	8,9	11,50	178,1450	35,629
38	**6 b**	98,5	49,5	6	10,2	13,10	190,6665	38,714
39	**6 c**	97	53	7,5	12,9	16,65	229,9967	47,422
40	**6 d**	95	59	10	17,1	22,00	281,4850	59,260
41	**7 a**	125	75	6	14,5	18,78	476,0562	76,169
42	**7 b**	123,5	74,5	7	16,1	20,75	499,4896	80,889
43	**7 c**	121,5	82	8,5	20,5	26,41	613,1376	100,928
44	**7 d**	119,5	90	11	27,0	34,75	758,8250	127,000
45	**8**	130	62	5,4	12,6	16,19	441,0000	67,800
46	**9**	130	85	8	22,0	28,39	770,1395	118,483
47	**10**	140	66	5,7	14,3	18,35	579,0000	82,700
48	**11 a**	150	80	7	18,5	24,24	882,4113	117,654
49	**11 b**	148	79,5	7,75	21,1	27,18	937,3358	126,667
50	**11 c**	146	88	9	25,1	32,38	1086,8021	148,877
51	**11 d**	144	94	11	31,8	41,02	1314,2880	182,540
52	**12 a**	176	91,5	8,5	24,0	31,13	1480,3032	168,216
53	**12 b**	174	90	9,25	26,8	34,54	1611,1095	185,185
54	**12 c**	172	96	10,5	31,2	40,14	1830,5014	212,849
55	**12 d**	170	99,5	12	37,1	47,80	2115,4290	248,874
56	**13 a**	200	100	9	29,5	38,30	2389,8547	238,985
57	**13 b**	198	99	10	32,2	41,44	2496,8592	252,208
58	**13 c**	196	106	11,5	38,3	49,28	2917,0484	297,658
59	**13 d**	194	113,5	14	47,6	61,27	3509,6249	361,817
60	**14**	220	100	10	33,4	42,98	3139,3010	285,391
61	**15**	235	91,5	8,5	28,5	36,72	2855,9433	243,059
62	**16**	235	94,5	8,5	31,4	40,48	3439,7890	292,748
63	**17 a**	235	96	10	33,8	44,42	3649,9848	310.637
64	**17 b**	233,5	97	11	37,5	48,30	3888,0202	333,021
65	**17 c**	232	107	12,5	44,4	57,15	4595,1776	396,136
66	**17 d**	230	113	15	42,5	67,61	5261,0000	457,500
67	**18**	235	93	10	31,1	40,10	3183,8095	271,962
68	**19**	235	90	10	33,0	42,50	3426,1590	291,588
69	**20**	235	91,5	13	40,2	51,75	4008,8415	341,178
70	**21**	240	106	8,7	36,2	46,40	4288,0000	357,000
71	**22 a**	250	115	11	43,3	55,80	5363,0000	429,040
72	**22 b**	248	114	11,75	45,8	59,00	5540,5184	446,816
73	**22 c**	246	122,5	13	53,6	69,01	6441,0057	523,659

Lfd. Nr.	Nr. des Hütten-verzeichnisses	Abmessungen in mm			Gewicht pro lfd. m in kg	Querschnitt in qcm	Trägheitsmoment für cm	Widerstandsmoment für cm
		h	b	d				
74	22 d	244	131	15	62,8	80,95	7407,9864	607,212
75	23 a	250	140	10	48,9	63,00	6535,8125	522,865
76	23 b	248,5	139	10,75	52,8	67,40	6854,3010	551,654
77	23 c	247	150	12	62,8	80,92	8186,3704	662,864
78	23 d	245	158	14	76,0	97,94	9618,3447	785,171
79	24	262	96	9,5	38,1	49,11	5151,8108	393,268
80	25 a	262	98	11,5	42,4	54,65	5451,5519	416,149
81	25 b	260	97.75	12,5	45,3	58,37	5673,4860	436,422
82	25 c	258	112,5	14,5	54,9	70,68	6859,7040	531,760
83	25 d	256	117	17	64,3	82,80	7842,5216	612,697
84	6	300	124	10	51,5	66,30	9536,5000	635,700
85	26 a	300	125	13	57,4	74,00	9957,5649	663,837
86	26 b	298	124,5	14	61,8	79,55	10512,8738	705,562
87	26 c	296	132	16	71,7	92,30	12023,0464	812,368
88	26 d	293	142	19	87,4	112,60	14319,3202	977,428
89	27 a	320	136	16	75,4	97,10	14711,2903	916,456
90	27 b	317,5	135	17	79,6	102,60	15219,9975	958,740
91	27 c	315	144	19	90,8	117,00	17117,6198	1086,833
92	28 a	355	142	13	68,1	87,70	16715,3703	941,711
93	28 b	353	141	14	75,1	96,70	18289,5124	1036,233
94	28 c	350	150	16	88,4	113,90	21283,6225	1216,207
95	29 a	400	140	16	85,8	110,50	25444,0800	1272,204
96	29 b	398	139	17	90,7	116,80	26379,4599	1325,601
97	29 c	396	150	19	104,4	134,50	30416,3838	1536,181
98	30	425	160	17	104	233,99	35404,0725	1666,074
99	31	450	168	17	114,3	147,23	43983,7650	1954,834
100	32	500	176	18	135,5	174,60	64150,1750	2566,007
101	33	550	200	19	167,0	215,21	99837,7600	3630,464
102	34	80	41	4,5	6,7	8,60	85,4840	21,371
103	35	100	42	5	8,3	10,65	160,6446	32,129
104	36	120	44	5,5	10	12,86	272,7061	45,451
105	37	140	47	6	12	15,47	438,9350	62,705
106	38	160	51	6,5	14	18,07	656,4000	82,050
107	39	180	55	7	16,4	21,10	956,5920	106,288
108	40	200	60	7,5	19,7	25,34	1427,1700	142,717
109	41	220	65	8	23,7	30,52	2108,3920	191,672

IV. Tafel über Querschnitt, Widerstandsmoment, Gewicht etc.

der

Trägerwellbleche.

(Nach der Profiltafel von L. Bernhard & Co., Berlin NW., Haidestrasse 55 — 57.)

k = 7,5 pro qmm.

Nr. des Profils	Wellspan tiefe mm	Halbe Wellbreite mm	Blechstärke mm	Widerstandsmoment für 1 m Breite bezogen auf mm	Querschnitt für 1 m Breite in mm	Gewöhnliche Breite der Tafeln	Ungef. Gewicht pro qm kg
F 4	50	45	1	21 000	1 750	0,675	13
G 4	45	45	1	17 000	1 620	0,675	12
G 3	45	45	3/4	12 750	1 215	0,675	9—10
G 8	45	45	2	34 000	3 240	0,675	24
1	50	50	1	17 000	1 600	0,750	12
B 8	50	50	2	34 000	3 240	0,750	24
2	60	50	1	25 000	1 800	0.650	14
3	70	50	1	33 000	2 050	0,650	16
4	60	50	1 1/2	37 800	2 690	0,650	21
5	80	50	1	40 000	2 380	0,550	18
6	90	50	1	48 000	2 480	0,550	19
7	60	50	2	50 400	3 625	0,650	29
8	70	50	1 1/2	50 500	3 000	0,650	24
9	100	50	1	56 400	2 625	0,450	20
10	80	50	1 1/2	60 000	3 375	0,550	25
11	70	50	2	67 000	4 000	0,650	31
12	90	50	1 1/2	72 000	3 650	0,550	28
13	80	50	2	80 000	4 500	0,550	35
14	100	50	1 1/2	84 600	4 000	0,450	30
15	90	50	2	96 000	4 900	0,550	38
16	70	50	3	101 100	6 120	0,650	48
17	100	50	2	112 800	5 375	0,550	40
18	80	50	3	120 000	6 875	0,650	52
19	90	50	3	144 000	7 250	0,650	55
20	120	60	2	152 500	5 500	0,540	42
21	80	60	4	160 000	8 000	0,660	62
22	100	50	3	169 200	8 000	0,550	61
23	90	60	4	182 000	8 680	0,660	67
24	140	60	2	199 600	6 120	0,420	48
26	100	60	4	225 600	9 400	0,660	72
27	120	60	3	228 800	8 240	0,540	64
30	140	60	3	299 400	9 400	0,540	72
31	120	60	4	305 000	11 000	0,540	85
32	120	60	5	381 000	13 800	0,540	107
33	140	60	4	399 200	12 240	0,540	96
34	140	60	5	499 000	15 300	0,540	120

V. Tafel der zulässigen Belastungen pro qcm in kg.

Berliner Baupolizei.

Material	Zug k	Druck k_1	Schub k_2	Material	Zug k	Druck k_1	Schub k_2
Schmiedeeisen . .	750	750	525	Sandstein (Nebraer), heller	—	30	—
Eisenblech . . .	750	750	525	Tuffstein (Brohler)	—	6	—
Eisendraht . . .	1200	—	—	Ziegelmauerwerk in Kalk, gewöhnl. .	—	7	—
Gusseisen . . .	250	500	190	Gutes Ziegelmauerwerk in Cement.	—	11	—
Gussstahl, gehärtet	3000	3000	2200	Bestes Ziegelmauerwerk in Cement.	—	12—14	—
Eichenholz . . .	120	66	—	Poröse Wölbziegel, leicht gebrannt .	—	3	—
Buchenholz . . .	120	66	—	desgl. hart gebrannt	—	6	—
Kiefernholz . . .	100	60	—	Steine aus Cement, Schlacken und scharfem Sand .	—	12	—
Tannenholz . . .	60	50	—	Guter Baugrund .	—	2,5	—
Glas	—	75	—				
Basalt.	—	75	—				
Granit.	—	45	—				
Kalkstein (Rüdersdorfer)	—	25	—				
Marmor	—	24	—				
Sandstein (Nebraer), rother	—	15	—				

Béton (Reichstagsgebäude) . . . . . . $k_1 = 6$.

Anhang B.

Tafel der zweiten und dritten Potenzen und Wurzeln

von den Zahlen 1 bis 100, von Zehntel zu Zehntel,

sowie von den Zahlen 101 bis 1000.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,000	5,0	25,00	125,000	2,2361	1,710
1,1	1,21	1,331	1,0488	1,032	5,1	26,01	132,651	2,2583	1,721
1,2	1,44	1,728	1,0954	1,063	5,2	27,04	140,608	2,2804	1,732
1,3	1,69	2,197	1,1402	1,091	5,3	28,09	148,877	2,3022	1,743
1,4	1,96	2,744	1,1832	1,119	5,4	29,16	157,464	2,3238	1,754
1,5	2,25	3,375	1,2247	1,145	5,5	30,25	166,375	2,3452	1,765
1,6	2,56	4,096	1,2649	1,170	5,6	31,36	175,616	2,3664	1,776
1,7	2,89	4,913	1,3038	1,193	5,7	32,49	185,193	2,3875	1,786
1,8	3,24	5,832	1,3416	1,216	5,8	33,64	195,112	2,4083	1,797
1,9	3,61	6,859	1,3784	1,239	5,9	34,81	205,379	2,4290	1,809
2,0	4,00	8,000	1,4142	1,260	6,0	36,00	216,000	2,4495	1,817
2,1	4,41	9,261	1,4491	1,281	6,1	37,21	226,981	2,4698	1,827
2,2	4,84	10,648	1,4832	1,301	6,2	38,44	238,328	2,4900	1,837
2,3	5,29	12,167	1,5166	1,320	6,3	39,69	250,047	2,5100	1,847
2,4	5,76	13,824	1,5492	1,339	6,4	40,96	262,144	2,5298	1,857
2,5	6,25	15,625	1,5811	1,357	6,5	42,25	274,625	2,5495	1,866
2,6	6,76	17,576	1,6125	1,375	6,6	43,56	287,496	2,5690	1,876
2,7	7,29	19,683	1,6432	1,392	6,7	44,89	300,763	2,5884	1,885
2,8	7,84	21,952	1,6733	1,410	6,8	46,24	314,432	2,6077	1,895
2,9	8,41	24,389	1,7029	1,426	6,9	47,61	328,509	2,6268	1,904
3,0	9,00	27,000	1,7321	1,442	7,0	49,00	343,000	2,6458	1,913
3,1	9,61	29,791	1,7607	1,458	7,1	50,41	357,911	2,6646	1,922
3,2	10,24	32,768	1,7889	1,474	7,2	51,84	373,248	2,6833	1,931
3,3	10,89	35,937	1,8166	1,489	7,3	53,29	389,017	2,7019	1,940
3,4	11,56	39,304	1,8439	1,504	7,4	54,76	405,224	2,7203	1,949
3,5	12,25	42,875	1,8708	1,518	7,5	56,25	421,875	2,7386	1,957
3,6	12,96	46,656	1,8974	1,533	7,6	57,76	438,976	2,7568	1,966
3,7	13,69	50,653	1,9235	1,547	7,7	59,29	456,533	2,7749	1,975
3,8	14,44	54,872	1,9494	1,561	7,8	60,84	474,552	2,7928	1,983
3,9	15,21	59,319	1,9748	1,574	7,9	62,41	493,039	2,8107	1,992
4,0	16,00	64,000	2,0000	1,587	8,0	64,00	512,000	2,8284	2,000
4,1	16,81	68,921	2,0248	1,601	8,1	65,61	531,441	2,8461	2,008
4,2	17,64	74,088	2,0494	1,613	8,2	67,24	551,368	2,8636	2,017
4,3	18,49	79,507	2,0736	1,626	8,3	68,89	571,787	2,8810	2,025
4,4	19,36	85,184	2,0976	1,639	8,4	70,56	592,704	2,8983	2,033
4,5	20,25	91,125	2,1213	1,651	8,5	72,25	614,125	2,9155	2,041
4,6	21,16	97,336	2,1448	1,663	8,6	73,96	636,056	2,9326	2,049
4,7	22,09	103,823	2,1679	1,675	8,7	75,69	658,503	2,9496	2,057
4,8	23,04	110,592	2,1909	1,687	8,8	77,44	681,472	2,9665	2,065
4,9	24,01	117,649	2,2136	1,698	8,9	79,21	704,969	2,9833	2,072

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
9,0	81,00	729,000	3,0000	2,080	15,0	225,00	3375,000	3,8730	2,466
9,1	82,81	753,571	3,0166	2,088	15,1	228,01	3442,951	3,8859	2,472
9,2	84,64	778,688	3,0332	2,095	15,2	231,04	3511,808	3,8987	2,477
9,3	86,49	804,357	3,0496	2,103	15,3	234,09	3581,577	3,9115	2,483
9,4	88,36	830,584	3,0659	2,111	15,4	237,16	3652,264	3,9243	2,488
9,5	90,25	857,375	3,0822	2,118	15,5	240,25	3723,875	3,9370	2,493
9,6	92,16	884,736	3,0984	2,125	15,6	243,36	3796,416	3,9497	2,499
9,7	94,09	912,673	3,1145	2,133	15,7	246,49	3869,893	3,9623	2,504
9,8	96,04	941,192	3,1305	2,140	15,8	249,64	3944,312	3,9749	2,509
9,9	98,01	970,299	3,1464	2,147	15,9	252,81	4019,679	3,9875	2,515
10,0	100,00	1000,000	3,1623	2,154	16,0	256,00	4096,000	4,0000	2,520
10,1	102,01	1030,301	3,1780	2,162	16,1	259,21	4173,281	4,0125	2,525
10,2	104,04	1061,208	3,1937	2,169	16,2	262,44	4251,528	4,0249	2,530
10,3	106,09	1092,727	3,2094	2,176	16,3	265,69	4330,747	4,0373	2,535
10,4	108,16	1124,864	3,2249	2,183	16,4	268,96	4410,944	4,0497	2,541
10,5	110,25	1157,625	3,2404	2,190	16,5	272,25	4492,125	4,0620	2,546
10,6	112,36	1191,016	3,2558	2,197	16,6	275,56	4574,296	4,0743	2,551
10,7	114,49	1225,043	3,2711	2,204	16,7	278,89	4657,463	4,0866	2,556
10,8	116,64	1259,712	3,2863	2,210	16,8	282,24	4741,632	4,0988	2,561
10,9	118,81	1295,029	3,3015	2,217	16,9	285,61	4826,809	4,1110	2,566
11,0	121,00	1331,000	3,3166	2,224	17,0	289,00	4913,000	4,1231	2,571
11,1	123,21	1367,631	3,3317	2,231	17,1	292,41	5000,211	4,1352	2,576
11,2	125,44	1404,928	3,3466	2,237	17,2	295,84	5088,448	4,1473	2,581
11,3	127,69	1442,897	3,3615	2,244	17,3	299,29	5177,717	4,1593	2,586
11,4	129,96	1481,544	3,3764	2,251	17,4	302,76	5268,024	4,1713	2,591
11,5	132,25	1520,875	3,3912	2,257	17,5	306,25	5359,375	4,1833	2,596
11,6	134,56	1560,896	3,4059	2,264	17,6	309,76	5451,776	4,1952	2,601
11,7	136,89	1601,613	3,4205	2,270	17,7	313,29	5545,233	4,2071	2,606
11,8	139,24	1643,032	3,4351	2,277	17,8	316,84	5639,752	4,2190	2,611
11,9	141,61	1685,159	3,4496	2,283	17,9	320,41	5735,339	4,2308	2,616
12,0	144,00	1728,000	3,4641	2,289	18,0	324,00	5832,000	4,2426	2,621
12,1	146,41	1771,561	3,4785	2,296	18,1	327,61	5929,741	4,2544	2,626
12,2	148,84	1815,848	3,4928	2,302	18,2	331,24	6028,568	4,2661	2,630
12,3	151,29	1860,867	3,5071	2,308	18,3	334,89	6128,487	4,2778	2,635
12,4	153,76	1906,624	3,5214	2,315	18,4	338,56	6229,504	4,2895	2,640
12,5	156,25	1953,125	3,5355	2,321	18,5	342,25	6331,625	4,3012	2,645
12,6	158,76	2000,376	3,5496	2,327	18,6	345,96	6434,856	4,3128	2,650
12,7	161,29	2048,383	3,5637	2,333	18,7	349,69	6539,203	4,3243	2,654
12,8	163,84	2097,152	3,5777	2,339	18,8	353,44	6644,672	4,3359	2,659
12,9	166,41	2146,689	3,5917	2,345	18,9	357,21	6751,269	4,3474	2,664
13,0	169,00	2197,000	3,6056	2,351	19,0	361,00	6859,000	4,3589	2,668
13,1	171,61	2248,091	3,6194	2,357	19,1	364,81	6967,871	4,3703	2,673
13,2	174,24	2299,968	3,6332	2,363	19,2	368,64	7077,888	4,3818	2,678
13,3	176,89	2352,637	3,6469	2,369	19,3	372,49	7189,057	4,8932	2,682
13,4	179,56	2406,104	3,6606	2,375	19,4	376,36	7301,384	4,4045	2,687
13,5	182,25	2460,375	3,6742	2,381	19,5	380,25	7414,875	4,4159	2,692
13,6	184,96	2515,456	3,6878	2,387	19,6	384,16	7529,536	4,4272	2,696
13,7	187,69	2571,353	3,7013	2,393	19,7	388,09	7645,373	4,4385	2,701
13,8	190,44	2628,072	3,7148	2,399	19,8	392,04	7762,392	4,4497	2,705
13,9	193,21	2685,619	3,7283	2,404	19,9	396,01	7880,599	4,4609	2,710
14,0	196,00	2744,000	3,7417	2,410	20,0	400,00	8000,000	4,4721	2,714
14,1	198,81	2803,221	3,7550	2,416	20,1	404,01	8120,601	4,4833	2,719
14,2	201,64	2863,288	3,7683	2,422	20,2	408,04	8242,408	4,4944	2,723
14,3	204,49	2924,207	3,7815	2,427	20,3	412,09	8365,427	4,5055	2,728
14,4	207,36	2985,984	3,7947	2,433	20,4	416,16	8489,664	4,5166	2,732
14,5	210,25	3048,625	3,8079	2,439	20,5	420,25	8615,125	4,5277	2,737
14,6	213,16	3112,136	3,8210	2,444	20,6	424,36	8741,816	4,5387	2,741
14,7	216,09	3176,523	3,8341	2,450	20,7	428,49	8869,743	4,5497	2,746
14,8	219,04	3241,792	3,8471	2,455	20,8	432,64	8998,912	4,5607	2,750
14,9	222,01	3307,949	3,8600	2,461	20,9	436,81	9129,329	4,5716	2,755

n	n²	n³	√n	∛n	n	n²	n³	√n	∛n
21,0	**441,00**	9261,000	4,5826	2,759	27,0	729,00	19683,000	5,1962	3,000
21,1	**445,21**	9893,931	4,5935	2,763	27,1	734,41	19902,511	5,2057	3,004
21,2	**449,44**	9528,128	4,6043	2,768	27,2	739,84	20123,648	5,2153	3,007
21,3	**458,69**	9663,597	4,6152	2,772	27,3	745,29	20346,417	5,2249	3,011
21,4	**457,96**	9800,344	4,6260	2,776	27,4	750,76	20570,824	5,2345	3,015
21,5	**462,25**	9938,375	4,6368	2,781	27,5	756,25	20796,875	5,2440	3,018
21,6	**466,56**	10077,696	4,6476	2,785	27,6	761,76	21024,576	5,2535	3,022
21,7	**470,89**	10218,313	4,6583	2,789	27,7	767,29	21253,933	5,2630	3,025
21,8	**475,24**	10360,232	4,6690	2,794	27,8	772,84	21484,952	5,2725	3,029
21,9	**479,61**	10503,459	4,6797	2,798	27,9	778,41	21717,639	5,2820	3,033
22,0	**484,00**	10648,000	4,6904	2,802	28,0	784,00	21952,000	5,2915	3,037
22,1	**488,41**	10793,861	4,7011	2,806	28,1	789,61	22188,041	5,3009	3,040
22,2	**492,84**	10941,048	4,7117	2,811	28,2	795,24	22425,768	5,3103	3,044
22,3	**497,29**	11089,567	4,7223	2,815	28,3	800,89	22665,187	5,3197	3,047
22,4	**501,76**	11239,424	4,7329	2,819	28,4	806,56	22906,304	5,3291	3,051
22,5	**506,25**	11390,625	4,7434	2,823	28,5	812,25	23149,125	5,3385	3,055
22,6	**510,76**	11543,176	4,7539	2,827	28,6	817,96	23393,656	5,3478	3,058
22,7	**515,29**	11697,083	4,7644	2,831	28,7	823,69	23639,903	5,3572	3,062
22,8	**519,84**	11852,352	4,7749	2,836	28,8	829,44	23887,872	5,3665	3,065
22,9	**524,41**	12008,989	4,7854	2,840	28,9	835,21	24137,569	5,3758	3,069
23,0	**529,00**	12167,000	4,7958	2,844	29,0	841,00	24389,000	5,3852	3,072
23,1	**533,61**	12326,391	4,8062	2,848	29,1	846,81	24642,171	5,3944	3,076
23,2	**538,24**	12487,168	4,8166	2,852	29,2	852,64	24897,088	5,4037	3,079
23,3	**542,89**	12649,337	4,8270	2,856	29,3	858,49	25153,757	5,4129	3,083
23,4	**547,56**	12812,904	4,8373	2,860	29,4	864,36	25412,184	5,4221	3,086
23,5	**552,25**	12977,875	4,8477	2,864	29,5	870,25	25672,375	5,4313	3,090
23,6	**556,96**	13144,256	4,8580	2,868	29,6	876,16	25934,336	5,4405	3,093
23,7	**561,69**	13312,053	4,8683	2,872	29,7	882,09	26198,073	5,4497	3,097
23,8	**566,44**	13481,272	4,8785	2,877	29,8	888,04	26463,592	5,4589	3,100
23,9	**571,21**	13651,919	4,8888	2,881	29,9	894,01	26730,899	5,4680	3,104
24,0	**576,00**	13824,000	4,8990	2,885	30,0	900,00	27000,000	5,4772	3,107
24,1	**580,81**	13997,521	4,9092	2,889	30,1	906,01	27270,901	5,4863	3,111
24,2	**585,64**	14172,488	4,9193	2,892	30,2	912,04	27543,608	5,4954	3,114
24,3	**590,49**	14348,907	4,9295	2,896	30,3	918,09	27818,127	5,5045	3,118
24,4	**595,36**	14526,784	4,9396	2,900	30,4	924,16	28094,464	5,5136	3,121
24,5	**600,25**	14706,125	4,9496	2,904	30,5	930,25	28372,625	5,5226	3,124
24,6	**605,16**	14886,936	4,9598	2,908	30,6	936,36	28652,616	5,5317	3,128
24,7	**610,09**	15069,223	4,9699	2,912	30,7	842,49	28634,443	5,5407	3,131
24,8	**615,04**	15252,992	4,9799	2,916	30,8	948,64	29218,112	5,5497	3,135
24,9	**620,01**	15438,249	4,9899	2,920	30,9	954,81	29503,629	5,5587	3,138
25,0	**625,00**	15625,000	5,0000	2,924	31,0	961,00	29791,000	5,5678	3,141
25,1	**630,01**	15813,251	5,0099	2,928	31,1	967,21	30080,231	5,5767	3,145
25,2	**635,04**	16003,008	5,0199	2,932	31,2	973,44	30371,328	5,5857	3,148
25,3	**640,09**	16194,277	5,0299	2,936	31,3	979,69	30664,297	5,5946	3,151
25,4	**645,16**	16387,064	5,0398	2,940	31,4	985,96	30959,144	5,6035	3,155
25,5	**650,25**	16581,375	5,0497	2,943	31,5	992,25	31255,875	5,6124	3,158
25,6	**655,36**	16777,216	6,0596	2,947	31,6	998,56	31554,496	5,6213	3,162
25,7	**660,49**	16974,593	5,0695	2,951	31,7	1004,89	31855,013	5,6302	3,165
25,8	**665,64**	17173,512	5,0793	2,855	31,8	1011,24	32157,432	5,6391	3,168
25,9	**670,81**	17373,979	5,0892	2,959	31,9	1017,61	32461,759	5,6480	3,171
26,0	**676,00**	17576,000	5,0990	2,962	32,0	1024,00	33768,000	5,6569	3,175
26,1	**681,21**	17779,581	5,1088	2,966	32,1	1030,41	33076,161	5,6656	3,178
26,2	**686,44**	17984,728	5,1185	2,970	32,2	1036,84	33386,248	5,6745	3,181
26,3	**691,69**	18191,447	5,1283	2,974	32,3	1043,29	33698,267	5,6833	3,185
26,4	**696,96**	18399,744	5,1380	2,978	32,4	1049,76	34012,224	5,6921	3,188
26,5	**702,25**	18609,625	5,1478	2,981	32,5	1056,25	34328,125	5,7008	3,191
26,6	**707,56**	18821,096	5,1575	2,985	32,6	1062,76	34645,976	5,7096	3,195
26,7	**712,89**	19034,163	5,1672	2,989	32,7	1069,29	34965,783	5,7183	3,198
26,8	**718,24**	19248,832	5,1768	2,993	32,8	1075,84	35287,552	5,7271	3,201
26,9	**723,61**	19465,109	5,1865	2,996	32,9	1082,41	35611,289	5,7358	3,204

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
33,0	1089,00	35937,000	5,7446	3,208	39,0	1521,00	59319,000	6,2450	3,391
33,1	1095,61	36264,691	5,7532	3,211	39,1	1528,81	59776,471	6,2530	3,394
33,2	1102,24	36594.368	5,7619	3,214	39,2	1536,64	60236,288	6,2610	3,397
33,3	1108,89	36926,037	5,7706	3,217	39,3	1544,49	60698,457	6,2689	3,400
33,4	1115,56	37259.704	5.7792	3,220	39,4	1552,36	61162,984	6,2769	3,403
33,5	1122,25	37595,375	5,7879	3,224	39,5	1560,25	61629,875	6,2849	3,406
33,6	1128,96	37933,056	5,7965	3,227	39,6	1568,16	62099,136	6,2928	3,409
33,7	1135,69	38272,753	5,8051	3,230	39,7	1576,09	62570,773	6,3008	3,411
33,8	1142,44	38614,472	5,8137	3,233	39,8	1584,04	63044,792	6,3087	3,414
33,9	1149,21	38958,219	5,8223	3,236	39,9	1592.01	63521.199	6,3166	3,417
34,0	1156,00	39304,000	5,8310	3,240	40,0	1600,00	64000,000	6,3246	3,420
34,1	1162,81	39651,821	5,8395	3,243	40,1	1608,01	64481,201	6,3325	3,423
34,2	1169,64	40001,688	5,8480	3,246	40,2	1616,04	64964,808	6,3404	3,426
34,3	1176,49	40353,607	5,8566	3,249	40,3	1624,09	65450,827	6,3482	3,428
34,4	1183,36	40707,584	5,8651	3,252	40,4	1632,16	65939,264	6,3561	3,431
34,5	1190,25	41063,625	5,8736	3,255	40,5	1640,25	66430,125	6,3639	3,434
34,6	1197,16	41421,736	5,8821	3,259	40,6	1648,36	66923,416	6,3718	3,437
34,7	1204,09	41781,923	5,8906	3,262	40,7	1656,49	67419,143	6,3796	3,440
34,8	1211,04	42144,192	5,8991	3,265	40,8	1664,64	67917,312	6,3875	3,443
34,9	1218,01	42508,549	5,9076	3,268	40,9	1672,81	68417,929	6,3953	3,445
35,0	1225,00	42875,000	5.9161	3,271	41,0	1681,00	68921,000	6,4031	3,448
35,1	1232,01	43243,551	5,9245	3,274	41,1	1689,21	69426,531	6,4109	3,451
35,2	1239,04	43614,208	5,9329	3,277	41,2	1697,44	69934,528	6,4187	3,454
35,3	1246,09	43986,977	5,9413	3,280	41,3	1705,69	70444,997	6,4265	3,457
35,4	1253,16	44361.864	5,9497	3,283	41,4	1713,96	70957,944	6,4343	3,459
35,5	1260,25	44738,875	5,9581	3,287	41,5	1722,25	71473,375	6,4421	3,462
35,6	1267,36	45118,016	5,9665	3,290	41,6	1730,56	71991,296	6,4498	3,465
35,7	1274,49	45499,293	5,9749	3,293	41,7	1738,89	72511,713	6,4575	3,468
35,8	1281,64	45882,712	5,9833	3,296	41,8	1747,24	73034,632	6,4653	3,471
35,9	1288,81	46268,279	5,9916	3,299	41,9	1755,61	73560,059	6,4730	3,473
36,0	1296,00	46656,000	6,0000	3,302	42,0	1764,00	74088,000	6,4807	3,476
36,1	1303,21	47045,881	6,0083	3,305	42,1	1772,41	74618,461	6,4884	3,479
36,2	1310,44	47437,928	6,0166	3,308	42,2	1780,84	75151,448	6,4961	3,482
36,3	1317,69	47832,147	6,0249	3,311	42,3	1789,29	75686,967	6,5038	3,484
36,4	1324,96	48228,544	6,0332	3,314	42,4	1797,76	76225,024	6,5115	3,487
36,5	1332,25	48627,125	6,0415	3,317	42,5	1806,25	76765,625	6,5192	3,490
36,6	1339,56	49027,896	6,0497	3,320	42,6	1814,76	77308,776	6,5268	3,493
36,7	1346,89	49430,863	6,0580	3,323	42,7	1823,29	77854,483	6,5345	3,495
36,8	1354,24	49836,032	6,0663	3,326	42,8	1831,84	78402,752	6,5422	3,498
36,9	1361,61	50243,409	6,0745	3,329	42,9	1840,41	78953,589	6,5498	3,501
37,0	1369,00	50653,000	6,0828	3,332	43,0	1849,00	79507,000	6,5574	3,503
37,1	1376,41	51064,811	6,0909	3,335	43,1	1857,61	80062,991	6,5651	3,506
37,2	1383,84	51478,848	6,0991	3,338	43,2	1866,24	80621,568	6,5727	3,509
37,3	1391,29	51895,117	6,1073	3,341	43,3	1874,89	81182,737	6,5803	3,512
37,4	1398,76	52313,624	6,1155	3.344	43,4	1883,56	81746,504	6,5879	3,514
37,5	1406,25	52734,375	6,1237	3,347	43,5	1892,25	82312,875	6,5954	3,517
37,6	1413,76	53157,376	6,1318	3,350	43,6	1900,96	82881,856	6,6030	3,520
37,7	1421,29	53582,633	6.1400	3,353	43,7	1909,69	83453,453	6,6106	3,522
37,8	1428,84	54010,152	6,1481	3,356	43,8	1918,44	84027,672	6,6182	3,525
37,9	1436,41	54439,939	6,1563	3,359	43,9	1927,21	84604,519	6,6257	3,528
38,0	1444,00	54872,000	6,1644	3,362	44,0	1936,00	85184,000	6,6332	3,530
38,1	1451,61	55306,341	6,1725	3,365	44,1	1944,81	85766,121	6,6408	3,533
38,2	1459,24	55742,968	6.1806	3,368	44,2	1953,64	86350,888	6,6483	3,536
38,3	1466,89	56181,887	6.1887	3,371	44,3	1962,49	86938,307	6,6558	3,538
38,4	1474,56	56623,104	6,1967	3.374	44,4	1971,36	87528,384	6,6633	3,541
38,5	1482,25	57066.625	6,2048	3,377	44,5	1980,25	88121,125	6,6708	3,544
38,6	1489,96	57512.456	6,2129	3,380	44,6	1989,16	88716,536	6,6783	3,546
38,7	1497,69	57960,603	6,2209	3,382	44,7	1998,09	89314,623	6,6858	3,549
38,8	1505.44	58411.072	6.2289	3,385	44,8	2007,04	89915,392	6,6933	3,552
38,9	1513,21	58863,869	6,2370	3,388	44,9	2016,01	90518,849	6,7007	3,554

n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
45,0	**2025,00**	91125,000	6,7082	3,557	51,0	2601,00	132651,000	7,1414	3,708
45,1	**2034,01**	91733,851	6,7156	3,560	51,1	2611,21	133432,831	7,1484	3,711
45,2	**2043,04**	92345,408	6,7231	3,562	51,2	2621,44	134217,728	7,1554	3,713
45,3	**2052,09**	92959,677	6,7305	3,565	51,3	2631,69	135005,697	7,1624	3,716
45,4	**2061,16**	93576,664	6,7379	3,567	51,4	2641,96	135796,744	7,1694	3,718
45,5	**2070,25**	94196,375	6,7454	3,570	51,5	2652,25	136590,875	7,1763	3,721
45,6	**2079,36**	94818,816	6,7528	3,573	51,6	2662,56	137388,096	7,1833	3,723
45,7	**2088,49**	95443,993	6,7602	3,575	51,7	2672,89	138188,413	7,1903	3,725
45,8	**2097,64**	96071,912	6,7676	3,578	51,8	2683,24	138991,832	7,1972	3,728
45,9	**2106,81**	96702,579	6,7749	3,580	51,9	2693,61	139798,359	7,2042	3,730
46,0	**2116,00**	97336,000	6,7823	3,583	52,0	2704,00	140608,000	7,2111	3,733
46,1	**2125,21**	97972,181	6,7897	3,586	52,1	2714,41	141420,761	7,2180	3,735
46,2	**2134,44**	98611,128	6,7971	3,588	52,2	2724,84	142236,648	7,2249	3,737
46,3	**2143,69**	99252,847	6,8044	3,591	52,3	2735,29	143055,667	7,2319	3,740
46,4	**2152,96**	99897,344	6,8117	3,593	52,4	2745,76	143877,824	7,2388	3,742
46,5	**2162,25**	100544,625	6,8191	3,596	52,5	2756,25	144703,125	7,2457	3,744
46,6	**2171,56**	101194,696	6,8264	3,599	52,6	2766,76	145531,576	7,2526	3,747
46,7	**2180,89**	101847,563	6,8337	3,601	52,7	2777,29	146363,183	7,2595	3,749
46,8	**2190,24**	102503,232	6,8410	3,604	52,8	2787,84	147197,952	7,2664	3,752
46,9	**2199,61**	103161,709	6,8484	3,606	52,9	2798,41	148035,889	7,2732	3,754
47,0	**2209,00**	103823,000	6,8557	3,609	53,0	2809,00	148877,000	7,2801	3,756
47,1	**2218,41**	104487,111	6,8629	3,611	53,1	2819,61	149721,291	7,2869	3,759
47,2	**2227,84**	105154,048	6,8702	3,614	53,2	2830,24	150568,768	7,2938	3,761
47,3	**2237,29**	105823,817	6,8775	3,616	53,3	2840,89	151419,437	7,3007	3,763
47,4	**2246,76**	106496,424	6,8847	3,619	53,4	2851,56	152273,304	7,3075	3,766
47,5	**2256,25**	107171,875	6,8920	3,622	53,5	2862,25	153130,875	7,3144	3,768
47,6	**2265,76**	107850,176	6,8993	3,624	53,6	2872,96	153990,656	7,3212	3,770
47,7	**2275,29**	108531,333	6,9065	3,627	53,7	2883,69	154854,153	7,3280	3,773
47,8	**2284,84**	109215,352	6,9137	3,629	53,8	2894,44	155720,872	7,3348	3,775
47,9	**2294,41**	109902,239	6,9209	3,632	53,9	2905,21	156590,819	7,3416	3,777
48,0	**2304,00**	110592,000	6,9282	3,634	54,0	2916,00	157464,000	7,3485	3,780
48,1	**2313,61**	111284,641	6,9354	3,637	54,1	2926,81	158340,421	7,3553	3,782
48,2	**2323,24**	111980,168	6,9426	3,639	54,2	2937,64	159220,088	7,3621	3,784
48,3	**2332,89**	112678,587	6,9498	3,642	54,3	2948,49	160103,007	7,3688	3,787
48,4	**2342,56**	113379,904	6,9570	3,644	54,4	2959,36	160989,184	7,3756	3,789
48,5	**2352,25**	114084,125	6,9642	3,647	54,5	2970,25	161878,625	7,3824	3,791
48,6	**2361,96**	114791,256	6,9714	3,649	54,6	2981,16	162771,336	7,3892	3,794
48,7	**2371,69**	115501,303	6,9785	3,652	54,7	2992,09	163667,323	7,3959	3,796
48,8	**2381,44**	116214,272	6,9857	3,654	54,8	3003,04	164566,592	7,4027	3,798
48,9	**2391,21**	116930,169	6,9928	3,657	54,9	3014,01	165469,149	7,4094	3,801
49,0	**2401,00**	117649,000	7,0000	3,659	55,0	3025,00	166375,000	7,4162	3,803
49,1	**2410,81**	118370,771	7,0071	3,662	55,1	3036,01	167284,151	7,4229	3,805
49,2	**2420,64**	119095,488	7,0143	3,664	55,2	3047,04	168196,608	7,4296	3,808
49,3	**2430,49**	119823,157	7,0214	3,667	55,3	3058,09	169112,377	7,4364	3,810
49,4	**2440,36**	120553,784	7,0285	3,669	55,4	3069,16	170031,464	7,4431	3,812
49,5	**2450,25**	121287,375	7,0356	3,672	55,5	3080,25	170953,875	7,4498	3,814
49,6	**2460,16**	122023,936	7,0427	3,674	55,6	3091,36	171879,616	7,4565	3,817
49,7	**2470,09**	122763,473	7,0498	3,677	55,7	3102,49	172808,693	7,4632	3,819
49,8	**2480,04**	123505,992	7,0569	3,679	55,8	3113,64	173741,112	7,4699	3,821
49,9	**2490,01**	124251,499	7,0640	3,682	55,9	3124,81	174676,879	7,4766	3,824
50,0	**2500,00**	125000,000	7,0711	3,684	56,0	3136,00	175616,000	7,4833	3,826
50,1	**2510,01**	125751,501	7,0781	3,686	56,1	3147,21	176558,481	7,4899	3,828
50,2	**2520,04**	126506,008	7,0852	3,689	56,2	3158,44	177504,328	7,4966	3,830
50,3	**2530,09**	127263,527	7,0923	3,691	56,3	3169,69	178453,547	7,5033	3,833
50,4	**2540,16**	128024,064	7,0993	3,694	56,4	3180,96	179406,144	7,5099	3,835
50,5	**2550,25**	128787,625	7,1063	3,696	56,5	3192,25	180362,125	7,5166	3,837
50,6	**2560,36**	129554,216	7,1133	3,699	56,6	3203,56	181321,496	7,5233	3,839
50,7	**2570,49**	130323,843	7,1204	3,701	56,7	3214,89	182284,263	7,5299	3,842
50,8	**2580,64**	131096,512	7,1274	3,704	56,8	3226,24	183250,432	7,5366	3,844
50,9	**2590,81**	131872,229	7,1344	3,706	56,9	3237,61	184220,009	7,5432	3,846

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
57.0	3249.00	185193,000	7,5498	3,849	63,0	3969.00	250047,000	7.9373	3,979
57,1	3260,41	186169,411	7,5564	3,851	63.1	3981,61	251239,591	7,9435	3,981
57,2	3271,84	187149,248	7,5631	3.853	63,2	3994.24	252435,968	7,9498	3,983
57,3	3283.29	188132,517	7.5696	3.855	63,3	4006,89	253636,137	7.9561	3,985
57,4	3294.76	189119,224	7.5763	3,857	63,4	4019,56	254840,104	7.9624	3,987
57.5	3306,25	190109,375	7,5828	3,860	63,5	4032,25	256047,875	7,9687	3,990
57,6	3317,76	191102,976	7.5894	3.862	63,6	4044,96	257259,456	7.9749	3,992
57,7	3329,29	192100,033	7.5960	3,864	63,7	4057,69	258474,853	7,9812	3,994
57,8	3340,84	193100,552	7,6026	3,866	63.8	4070,44	259694,072	7,9875	3,996
57,9	3352,41	194104,539	7.6092	3,869	63,9	4083,21	260917,119	7,9937	3,998
58,0	3364,00	195112,000	7,6158	3,871	64,0	4096,00	262144,000	8,0000	4,000
58.1	3375.61	196122,941	7.6223	3,873	64.1	4108,81	263374,721	8,0062	4,002
58.2	3387,24	197137,368	7,6289	3,875	64,2	4121,64	264609,288	8.0125	4,004
58,3	3398,89	198155.287	7,6354	3.878	64,3	4134,49	265847,707	8,0187	4,006
58,4	3410,56	199176,704	7,6420	3,880	64,4	4147,36	267089,984	8,0249	4,008
58.5	3422,25	200201,625	7,6485	3,882	64,5	4160,25	268336,125	8,0312	4,010
58.6	3433,96	201230,056	7.6551	3,884	64.6	4173,16	269586,136	8,0374	4,012
58,7	3445,69	202262,003	7.6616	3,886	64,7	4186,09	270840,023	8,0436	4,015
58,8	3457,44	203297,472	7,6681	3,889	64,8	4199,04	272097,792	8,0498	4,017
58,9	3469,21	204336,469	7,6746	3,891	64,9	4212,01	273359,449	8,0560	4,019
59,0	3481,00	205379,000	7,6811	3,893	65,0	4225,00	274625,000	8.0623	4,021
59,1	3492,81	206425,071	7,6876	3.895	65,1	4288,01	275894,451	8,0685	4,023
59,2	3504.64	207474,688	7,6941	3,897	65,2	4251,04	277167,808	8,0746	4,025
59,3	3516,49	208527,857	7,7007	3,900	65,3	4264,09	278445,077	8,0808	4,027
59,4	3528,36	209584,584	7,7071	3,902	65,4	4277,16	279726,264	8,0870	4,029
59,5	3540,25	210644,875	7,7136	3,904	65,5	4290,25	281011,375	8,0932	4,031
59.6	3552.16	211708,736	7,7201	3,906	65,6	4303,36	282300,416	8,0994	4,033
59,7	3564,09	212776,173	7,7266	3,908	65,7	4316,49	283593,393	8,1055	4,035
59,8	3576,04	213847,192	7,7330	3,911	65,8	4329,64	284890,312	8,1117	4,037
59,9	3588,01	214921,799	7,7395	3,913	65,9	4342,81	286191,179	8,1178	4,039
60,0	3600,00	216000,000	7,7460	3,915	66,0	4356,00	287496,000	8,1240	4,041
60,1	3612,01	217081,801	7,7524	3,917	66,1	4369,21	288804,781	8,1302	4,043
60,2	3624,04	218167,208	7,7588	3,919	66,2	4382,44	290117,528	8,1363	4,045
60,3	3636,09	219256,227	7,7653	3,921	66,3	4395,69	291434,247	8,1425	4,047
60,4	3648.16	220348,864	7.7717	3,924	66,4	4408,96	292754,944	8,1486	4,049
60,5	3660,25	221445,125	7.7782	3,926	66,5	4422,25	294079,625	8,1548	4,051
60,6	3672,36	222545,016	7.7846	3,928	66,6	4435,56	295408,296	8,1609	4,053
60,7	3684.49	223648,543	7.7910	3,930	66,7	4448,89	296740,963	8,1670	4,055
60,8	3696,64	224755,712	7.7974	3,932	66.8	4462,24	298077,632	8,1731	4,058
60,9	3708.81	225866,529	7,8038	3,934	66.9	4475,61	299418,809	8,1792	4,060
61,0	3721,00	226981,000	7,8102	3,936	67,0	4489,00	300763,000	8,1854	4,062
61,1	3733,21	228099,131	7.8166	3,939	67,1	4502,41	302111,711	8,1915	4,064
61,2	3745,44	229220,928	7.8230	3,941	67,2	4515,84	303464,448	8,1976	4,066
61,3	3757,69	230346,397	7,8294	3,943	67,3	4529,29	304821,217	8,2037	4,068
61,4	3769,96	231475,544	7.8358	3.945	67.4	4542,76	306182,024	8,2098	4,070
61,5	3782,25	232608,375	7,8422	3,947	67.5	4556,25	307546,875	8,2158	4,072
61,6	3794,56	233744.896	7.8485	3,949	67,6	4569,76	308915,776	8,2219	4,074
61,7	3806,89	234885,113	7,8549	3,951	67.7	4583,29	310288,733	8,2281	4,076
61,8	3819,24	236029,032	7,8613	3,954	67,8	4596,84	311665,752	8,2341	4,078
61,9	3831,61	237176,659	7,8676	3,956	67,9	4610,41	313046,839	8,2401	4,080
62,0	3844,00	238328,000	7,8740	3,958	68.0	4624.00	314432,000	8,2462	4,082
62,1	3856,41	239483,061	7,8803	3,960	68,1	4637,61	315821,241	8,2522	4,084
62,2	3868,84	240641,848	7,8867	3,962	68,2	4651,24	317214,568	8,2583	4,086
62,3	3881,29	241804,367	7,8930	3,964	68,3	4664,89	318611,987	8,2648	4,088
62,4	3893,76	242970,624	7,8994	3,966	68,4	4678,56	320013,504	8,2704	4,090
62,5	3906,25	244140,625	7,9057	3,969	68,5	4692,25	321419,125	8,2765	4,092
62,6	3918,76	245314,376	7,9120	3,971	68,6	4705.96	322828,856	8,2825	4,094
62,7	3931,29	246491,883	7,9183	3,973	68,7	4719,69	324242,703	8,2885	4,096
62,8	3943,84	247673,152	7,9246	3,975	68,8	4733,44	325660,672	8,2946	4,098
62,9	3956,41	248858,189	7.9309	3,977	68,9	4747,21	327082,769	8,3006	4,100

n	n²	n³	√n	∛n	n	n²	n³	√n	∛n
69,0	**4761,00**	**328509,000**	8,3066	4,102	75,0	5625,00	421875,000	8,6603	4,217
69,1	**4774,81**	**329939,371**	8,3126	4,104	75,1	5640,01	423564,751	8,6660	4,219
69,2	**4788,64**	**331373,888**	8,3187	4,106	75,2	5655,04	425259,008	8,6718	4,221
69,3	**4802,49**	**332812,557**	8,3247	4,108	75,3	5670,09	426957,777	8,6776	4,223
69,4	**4816,36**	**334255,384**	8,3307	4,109	75,4	5685,16	428661,064	8,6833	4,225
69,5	**4830,25**	**335702,375**	8,3367	4,111	75,5	5700,25	430368,875	8,6891	4,227
69,6	**4844,16**	**337153,536**	8,3427	4,113	75,6	5715,36	432081,216	8,6948	4,228
69,7	**4858,09**	**338608,873**	8,3487	4,115	75,7	5730,49	433798,093	8,7006	4,230
69,8	**4872,04**	**340068,392**	8,3546	4,117	75,8	5745,64	435519,512	8,7063	4,232
69,9	**4886,01**	**341532,099**	8,3606	4,119	75,9	5760,81	437245,479	8,7121	4,234
70,0	**4900,00**	**343000,000**	8,3666	4,121	76,0	5776,00	438976,000	8,7178	4,236
70,1	**4914,01**	344472,101	8,3726	4,123	76,1	5791,21	440711,081	8,7235	4,238
70,2	**4928,04**	345948,408	8,3785	4,125	76,2	5806,44	442450,728	8,7293	4,240
70,3	**4942,09**	347428,927	8,3845	4,127	76,3	5821,69	444194,947	8,7350	4,241
70,4	**4956,16**	348913,664	8,3904	4,129	76,4	5836,96	445943,744	8,7407	4,243
70,5	**4970,25**	350402,625	8,3964	4,131	76,5	5852,25	447697,125	8,7464	4,245
70,6	**4984,36**	351895,816	8,4023	4,133	76,6	5867,56	449455,096	8,7521	4,247
70,7	**4998,49**	353393,243	8,4083	4,135	76,7	5882,89	451217,663	8,7579	4,249
70,8	5012,64	354894,912	8,4142	4,137	76,8	5898,24	452984,832	8,7636	4,251
70,9	5026,81	356400,829	8,4202	4,139	76,9	5913,61	454756,609	8,7693	4,252
71,0	5041,00	357911,000	8,4261	4,141	77,0	5929,00	456533,000	8,7750	4,254
71,1	5055,21	359425,431	8,4321	4,143	77,1	5944,41	458314,011	8,7807	4,256
71,2	5069,44	360944,128	8,4380	4,145	77,2	5959,84	460099,648	8,7864	4,258
71,3	5083,69	362467,097	8,4439	4,147	77,3	5975,29	461889,917	8,7920	4,260
71,4	5097,96	363994,344	8,4499	4,149	77,4	5990,76	463684,824	8,7977	4,262
71,5	5112,25	365525,875	8,4558	4,151	77,5	6006,25	465484,375	8,8034	4,264
71,6	5126,56	367061,696	8,4617	4,152	77,6	6021,76	467288,576	8,8091	4,265
71,7	5140,89	368601,813	8,4676	4,154	77,7	6037,29	469097,433	8,8148	4,267
71,8	5155,24	370146,232	8,4735	4,156	77,8	6052,84	470910,952	8,8204	4,269
71,9	5169,61	371694,959	8,4794	4,158	77,9	6068,41	472729,139	8,8261	4,271
72,0	5184,00	373248,000	8,4853	4,160	78,0	6084,00	474552,000	8,8318	4,272
72,1	5198,41	374805,361	8,4912	4,162	78,1	6099,61	476379,541	8,8374	4,274
72,2	5212,84	376367,048	8,4971	4,164	78,2	6115,24	478211,768	8,8431	4,276
72,3	5227,29	377933,067	8,5029	4,166	78,3	6130,89	480048,687	8,8487	4,278
72,4	5241,76	379503,424	8,5088	4,168	78,4	6146,56	481890,304	8,8544	4,280
72,5	5256,25	381078,125	8,5147	4,170	78,5	6162,25	483736,625	8,8600	4,282
72,6	5270,76	382657,176	8,5206	4,172	78,6	6177,96	485587,656	8,8657	4,284
72,7	5285,29	384240,583	8,5264	4,174	78,7	6193,69	487443,403	8,8713	4,285
72,8	5299,84	385828,352	8,5323	4,176	78,8	6209,44	489303,872	8,8769	4,287
72,9	5314,41	387420,489	8,5381	4,177	78,9	6225,21	491169,069	8,8826	4,289
73,0	5329,00	389017,000	8,5440	4,179	79,0	6241,00	493039,000	8,8882	4,291
73,1	5343,61	390617,891	8,5499	4,181	79,1	6256,81	494913,671	8,8938	4,293
73,2	5358,24	392223,168	8,5557	4,183	79,2	6272,64	496793,088	8,8994	4,294
73,3	5372,89	393832,837	8,5615	4,185	79,3	6288,49	498677,257	8,9050	4,296
73,4	5387,56	395446,904	8,5674	4,187	79,4	6304,36	500566,184	8,9107	4,298
73,5	5402,25	397065,375	8,5732	4,189	79,5	6320,25	502459,875	8,9163	4,300
73,6	5416,96	398688,256	8,5790	4,191	79,6	6336,16	504358,336	8,9219	4,302
73,7	5431,69	400315,553	8,5849	4,193	79,7	6352,09	506261,573	8,9275	4,303
73,8	5446,44	401947,272	8,5907	4,195	79,8	6368,04	508169,592	8,9331	4,305
73,9	5461,21	403583,419	8,5965	4,196	79,9	6384,01	510082,399	8,9387	4,307
74,0	5476,00	405224,000	8,6023	4,198	80,0	6400,00	512000,000	8,9443	4,309
74,1	5490,81	406869,021	8,6081	4,200	80,1	6416,01	513922,401	8,9499	4,311
74,2	5505,64	408518,488	8,6139	4,202	80,2	6432,04	515849,608	8,9554	4,312
74,3	5520,49	410172,407	8,6197	4,204	80,3	6448,09	517781,627	8,9610	4,314
74,4	5535,36	411830,784	8,6255	4,206	80,4	6464,16	519718,464	8,9666	4,316
74,5	5550,25	413493,625	8,6313	4,208	80,5	6480,25	521660,125	8,9722	4,318
74,6	5565,16	415160,936	8,6371	4,210	80,6	6496,36	523606,616	8,9778	4,320
74,7	5580,09	416832,723	8,6429	4,212	80,7	6512,49	525557,943	8,9833	4,321
74,8	5595,04	418508,992	8,6487	4,213	80,8	6528,64	527514,112	8,9889	4,323
74,9	5610,01	420189,749	8,6545	4,215	80,9	6544,81	529475,129	8,9944	4,325

n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n²	n³	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
81,0	6561,00	531441,000	9,0000	4,327	87,0	7569,00	658503,000	9,3274	4,431
81,1	6577,21	533411,731	9,0056	4,329	87,1	7586,41	660776,311	9,3327	4,433
81,2	6593,44	535387,328	9,0111	4,330	87,2	7603,84	663054,848	9,3381	4,434
81,3	6609,69	537367,797	9,0167	4,332	87,3	7621,29	665338,617	9,3434	4,436
81,4	6625,96	539353,144	9,0222	4,334	87,4	7638,76	667627,624	9,3488	4,438
81,5	6642,25	541343,375	9,0277	4,336	87,5	7656,25	669921,875	9,3541	4,440
81,6	6658,56	543338,496	9,0333	4,337	87,6	7673,76	672221,376	9,3595	4,441
81,7	6674,89	545338,513	9,0388	4,339	87,7	7691,29	674526,133	9,3648	4,443
81,8	6691,24	547343,432	9,0443	4,341	87,8	7708,84	676836,152	9,3702	4,445
81,9	6707,61	549353,259	9,0499	4,343	87,9	7726,41	679151,439	9,3755	4,446
82,0	6724,00	551368,000	9,0554	4,344	88,0	7744,00	681472,000	9,3808	4,448
82,1	6740,41	553387,661	9,0609	4,346	88,1	7761,61	683797,841	9,3861	4,450
82,2	6756,84	555412,248	9,0664	4,348	88,2	7779,24	686128,968	9,3915	4,451
82,3	6773,29	557441,767	9,0719	4,350	88,3	7796,89	688465,387	9,3968	4,453
82,4	6789,76	559476,224	9,0774	4,352	88,4	7814,56	690807,104	9,4021	4,455
82,5	6806,25	561515,625	9,0829	4,353	88,5	7832,25	693154,125	9,4074	4,456
82,6	6822,76	563559,976	9,0885	4,355	88,6	7849,96	695506,456	9,4127	4,458
82,7	6839,29	565609,283	9,0940	4,357	88,7	7867,69	697864,103	9,4181	4,460
82,8	6855,84	567663,552	9,0995	4,359	88,8	7885,44	700227,072	9,4234	4,461
82,9	6872,41	569722,789	9,1049	4,360	88,9	7903,21	702595,369	9,4287	4,463
83,0	6889,00	571787,000	9,1104	4,362	89,0	7921,00	704969,000	9,4340	4,465
83,1	6905,61	573856,191	9,1159	4,364	89,1	7938,81	707347,971	9,4393	4,466
83,2	6922,24	575930,368	9,1214	4,366	89,2	7956,64	709732,288	9,4446	4,468
83,3	6938,89	578009,537	9,1269	4,367	89,3	7974,49	712121,957	9,4499	4,470
83,4	6955,56	580093,704	9,1324	4,369	89,4	7992,36	714516,984	9,4552	4,471
83,5	6972,25	582182,875	9,1378	4,371	89,5	8010,25	716917,375	9,4604	4,473
83,6	6988,96	584277,056	9,1433	4,373	89,6	8028,16	719323,136	9,4657	4,475
83,7	7005,69	586376,253	9,1488	4,374	89,7	8046,09	721734,273	9,4710	4,476
83,8	7022,44	588480,472	9,1542	4,376	89,8	8064,04	724150,792	9,4763	4,478
83,9	7039,21	590589,719	9,1597	4,378	89,9	8082,01	726572,699	9,4816	4,480
84,0	7056,00	592704,000	9,1651	4,380	90,0	8100,00	729000,000	9,4868	4,481
84,1	7072,81	594823,321	9,1706	4,381	90,1	8118,01	731432,701	9,4921	4,483
84,2	7089,64	596947,688	9,1760	4,383	90,2	8136,04	733870,808	9,4974	4,485
84,3	7106,49	599077,107	9,1815	4,385	90,3	8154,09	736314,327	9,5026	4,486
84,4	7123,36	601211,584	9,1869	4,386	90,4	8172,16	738763,264	9,5079	4,488
84,5	7140,25	603351,125	9,1924	4,388	90,5	8190,25	741217,625	9,5131	4,490
84,6	7157,16	605495,736	9,1978	4,390	90,6	8208,36	743677,416	9,5184	4,491
84,7	7174,09	607645,423	9,2033	4,392	90,7	8226,49	746142,643	9,5236	4,493
84,8	7191,04	609800,192	9,2087	4,393	90,8	8244,64	748613,312	9,5289	4,495
84,9	7208,01	611960,049	9,2141	4,395	90,9	8262,81	751089,429	9,5341	4,496
85,0	7225,00	614125,000	9,2195	4,397	91,0	8281,00	753571,000	9,5394	4,498
85,1	7242,01	616295,051	9,2250	4,398	91,1	8299,21	756058,031	9,5446	4,500
85,2	7259,04	618470,208	9,2304	4,400	91,2	8317,44	758550,528	9,5499	4,501
85,3	7276,09	620650,477	9,2358	4,402	91,3	8335,69	761048,497	9,5551	4,503
85,4	7293,16	622835,864	9,2412	4,404	91,4	8353,96	763551,944	9,5603	4,505
85,5	7310,25	625026,375	9,2466	4,405	91,5	8372,25	766060,875	9,5656	4,506
85,6	7327,36	627222,016	9,2520	4,407	91,6	8390,56	768575,296	9,5708	4,508
85,7	7344,49	629422,793	9,2574	4,409	91,7	8408,89	771095,213	9,5760	4,509
85,8	7361,64	631628,712	9,2628	4,411	91,8	8427,24	773620,632	9,5812	4,511
85,9	7378,81	633839,779	9,2682	4,412	91,9	8445,61	776151,559	9,5864	4,513
86,0	7396,00	636056,000	9,2736	4,414	92,0	8464,00	778688,000	9,5917	4,514
86,1	7413,21	638277,381	9,2790	4,416	92,1	8482,41	781229,961	9,5969	4,516
86,2	7430,44	640503,928	9,2844	4,417	92,2	8500,84	783777,448	9,6021	4,518
86,3	7447,69	642735,647	9,2898	4,419	92,3	8519,29	786330,467	9,6073	4,519
86,4	7464,96	644972,544	9,2952	4,421	92,4	8537,76	788889,024	9,6125	4,521
86,5	7482,25	647214,625	9,3005	4,423	92,5	8556,25	791453,125	9,6177	4,523
86,6	7499,56	649461,896	9,3059	4,424	92,6	8574,76	794022,776	9,6229	4,524
86,7	7516,89	651714,363	9,3113	4,425	92,7	8593,29	796597,983	9,6281	4,526
86,8	7534,24	653972,032	9,3167	4,428	92,8	8611,84	799178,752	9,6333	4,527
86,9	7551,61	656234,909	9,3220	4,429	92,9	8630,41	801765,089	9,6385	4,529

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
93,0	8649,00	804357,000	9,6437	4,531	99,0	9801,00	970299,000	9,950	4,626
93,1	8667,61	806954,491	9,6488	4,532	99,1	9820,81	973242,271	9,955	4,628
93,2	8686,24	809557,568	9,6540	4,534	99,2	9840,64	976191,488	9,960	4,629
93,3	8704,89	812166,237	9,6592	4,536	99,3	9860,49	979146,657	9,965	4,631
93,4	8723,56	814780,504	9,6644	4,537	99,4	9880,36	982107,784	9,970	4,632
93,5	8742,25	817400,375	9,6695	4,539	99,5	9900,25	985074,375	9,975	4,634
93,6	8760,96	820025,856	9,6747	4,540	99,6	9920,16	988047,936	9,980	4,635
93,7	8779,69	822656,953	9,6799	4,542	99,7	9940,09	991026,973	9,985	4,637
93,8	8798,44	825293,672	9,6850	4,544	99,8	9960,04	994011,992	9,990	4,638
93,9	8817,21	827936,019	9,6902	4,545	99,9	9980,01	997002,999	9,995	4,640
94,0	8836,00	830584,000	9,6954	4,547	100	10000	1000000	10,000	4,642
94,1	8854,81	833237,621	9,7005	4,548	101	10201	1030301	10,050	4,657
94,2	8873,64	835896,888	9,7057	4,550	102	10404	1061208	10,100	4,672
94,3	8892,49	838561,807	9,7108	4,552	103	10609	1092727	10,149	4,688
94,4	8911,36	841232,384	9,7160	4,553	104	10816	1124864	10,198	4,703
94,5	8930,25	843908,625	9,7211	4,555	105	11025	1157625	10,247	4,718
94,6	8949,16	846590,536	9,7262	4,556	106	11236	1191016	10,296	4,733
94,7	8968,09	849278,123	9,7314	4,558	107	11449	1225043	10,344	4,747
94,8	8987,04	851971,392	9,7365	4,560	108	11664	1259712	10,392	4,762
94,9	9006,01	854670,349	9,7417	4,561	109	11881	1295029	10,440	4,777
95,0	9025,00	857375,000	9,7468	4,563	110	12100	1331000	10,488	4,791
95,1	9044,01	860085,351	9,7519	4,565	111	12321	1367631	10,536	4,806
95,2	9063,04	862801,408	9,7570	4,566	112	12544	1404928	10,583	4,820
95,3	9082,09	865523,177	9,7622	4,568	113	12769	1442897	10,630	4,835
95,4	9101,16	868250,664	9,7673	4,569	114	12996	1481544	10,677	4,849
95,5	9120,25	870983,875	9,7724	4,571	115	13225	1520875	10,724	4,863
95,6	9139,36	873722,816	9,7775	4,572	116	13456	1560896	10,770	4,877
95,7	9158,49	876467,493	9,7826	4,574	117	13689	1601613	10,817	4,891
95,8	9177,64	879217,912	9,7877	4,576	118	13924	1643032	10,863	4,905
95,9	9196,81	881974,079	9,7928	4,577	119	14161	1685159	10,909	4,919
96,0	9216,00	884736,000	9,7980	4,579	120	14400	1728000	10,954	4,932
96,1	9235,21	887503,681	9,8031	4,580	121	14641	1771561	11,000	4,946
96,2	9254,44	890277,128	9,8082	4,582	122	14884	1815848	11,045	4,960
96,3	9273,69	893056,347	9,8132	4,584	123	15129	1860867	11,091	4,973
96,4	9292,96	895841,344	9,8180	4,585	124	15376	1906624	11,136	4,987
96,5	9312,25	898632,125	9,8234	4,587	125	15625	1953125	11,180	5,000
96,6	9331,56	901428,696	9,8285	4,588	126	15876	2000376	11,225	5,013
96,7	9350,89	904231,063	9,8336	4,590	127	16129	2048383	11,269	5,027
96,8	9370,24	907039,232	9,8387	4,592	128	16384	2097152	11,314	5,040
96,9	9389,61	909853,209	9,8438	4,593	129	16641	2146689	11,358	5,053
97,0	9409,00	912673,000	9,8489	4,595	130	16900	2197000	11,402	5,066
97,1	9428,41	915498,611	9,8539	4,596	131	17161	2248091	11,446	5,079
97,2	9447,84	918330,048	9,8590	4,598	132	17424	2299968	11,489	5,092
97,3	9467,29	921167,317	9,8641	4'599	133	17689	2352637	11,533	5,104
97,4	9486,76	924010,424	9,8691	4,601	134	17956	2406104	11,576	5,117
97,5	9506,25	926859,375	9,8742	4,603	135	18225	2460375	11,619	5,130
97,6	9525,76	929714,176	9,8793	4,604	136	18496	2515456	11,662	5,143
97,7	9545,29	932574,833	9,8843	4,606	137	18769	2571353	11,705	5,155
97,8	9564,84	935441,352	9,8894	4,607	138	19044	2628072	11,747	5,168
97,9	9584,41	938313,739	9,8944	4,609	139	19321	2685619	11,790	5,180
98,0	9604,00	941192,000	9,8995	4,610	140	19600	2744000	11,832	5,192
98,1	9623,61	944076,141	9,9045	4,612	141	19881	2803221	11,874	5,205
98,2	9643,24	946966,168	9,9096	4,614	142	20164	2863288	11,916	5,217
98,3	9662,89	949862,087	9,9146	4,615	143	20449	2924207	11,958	5,229
98,4	9682,56	952763,904	9,9197	4,617	144	20736	2985984	12,000	5,241
98,5	9702,25	955671,625	9,9247	4,618	145	21025	3048625	12,042	5,254
98,6	9721,96	958585,256	9,9297	4,620	146	21316	3112136	12,083	5,266
98,7	9741,69	961504,803	9,9348	4,621	147	21609	3176523	12,124	5,278
98,8	9761,44	964430,272	9,9398	4,623	148	21904	3241792	12,166	5,290
98,9	9781,21	967361,669	9,9448	4,625	149	22201	3307949	12,207	5,301

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
150	22500	3375000	12,247	5,313	210	44100	9261000	14,491	5,944
151	22801	3442951	12,288	5,325	211	44521	9393931	14,526	5,953
152	23104	3511808	12,329	5,337	212	44944	9528128	14,560	5,963
153	23409	3581577	12,369	5,348	213	45369	9663597	14,595	5,972
154	23716	3652264	12,410	5,360	214	45796	9800344	14,629	5,981
155	24025	3723875	12,450	5,372	215	46225	9938375	14,663	5,991
156	24336	3796416	12,490	5,383	216	46656	10077696	14,697	6,000
157	24649	3869893	12,530	5,395	217	47089	10218313	14,731	6,009
158	24964	3944312	12,570	5,406	218	47524	10360232	14,765	6,018
159	25281	4019679	12,610	5,418	219	47961	10503459	14,799	6,028
160	25600	4096000	12,649	5,429	220	48400	10648000	14,832	6,037
161	25921	4173281	12,689	5,440	221	48841	10793861	14,866	6,046
162	26244	4251528	12,728	5,451	222	49284	10941048	14,900	6,055
163	26569	4330747	12,767	5,463	223	49729	11089567	14,933	6,064
164	26896	4410944	12,806	5,474	224	50176	11239424	14,967	6,073
165	27225	4492125	12,845	5,485	225	50625	11390625	15,000	6,082
166	27556	4574296	12,884	5,496	226	51076	11543176	15,033	6,091
167	27889	4657463	12,923	5,507	227	51529	11697083	15,067	6,100
168	28224	4741632	12,961	5,518	228	51984	11852352	15,100	6,109
169	28561	4826809	13,000	5,529	229	52441	12008989	15,133	6,118
170	28900	4913000	13,038	5,540	230	52900	12167000	15,166	6,127
171	29241	5000211	13,077	5,550	231	53361	12326391	15,199	6,136
172	29584	5088448	13,115	5,561	232	53824	12487168	15,232	6,145
173	29929	5177717	13,153	5,572	233	54289	12649337	15,264	6,153
174	30276	5268024	13,191	5,583	234	54756	12812904	15,297	6,162
175	30625	5359375	13,229	5,593	235	55225	12977875	15,330	6,171
176	30976	5451776	13,266	5,604	236	55696	13144256	15,362	6,180
177	31329	5545233	13,304	5,615	237	56169	13312053	15,395	6,188
178	31684	5639752	13,342	5,625	238	56644	13481272	15,427	6,197
179	32041	5735339	13,379	5,636	239	57121	13651919	15,460	6,206
180	32400	5832000	13,416	5,646	240	57600	13824000	15,492	6,214
181	32761	5929741	13,454	5,657	241	58081	13997521	15,524	6,223
182	33124	6028568	13,491	5,667	242	58564	14172488	15,556	6,232
183	33489	6128487	13,528	5,677	243	59049	14348907	15,588	6,240
184	33856	6229504	13,565	5,688	244	59536	14526784	15,620	6,249
185	34225	6331625	13,601	5,698	245	60025	14706125	15,652	6,257
186	34596	6434856	13,638	5,708	246	60516	14886936	15,684	6,266
187	34969	6539203	13,675	5,718	247	61009	15069223	15,716	6,274
188	35344	6644672	13,711	5,729	248	61504	15252992	15,748	6,283
189	35721	6751269	13,748	5,739	249	62001	15438249	15,780	6,291
190	36100	6859000	13,784	5,749	250	62500	15625000	15,811	6,300
191	36481	6967871	13,820	5,759	251	63001	15813251	15,843	6,308
192	36864	7077888	13,856	5,769	252	63504	16003008	15,875	6,316
193	37249	7189057	13,892	5,779	253	64009	16194277	15,906	6,325
194	37636	7301384	13,928	5,789	254	64516	16387064	15,937	6,333
195	38025	7414875	13,964	5,799	255	65025	16581375	15,969	6,341
196	38416	7529536	14,000	5,809	256	65536	16777216	16,000	6,350
197	38809	7645373	14,036	5,819	257	66049	16974593	16,031	6,358
198	39204	7762392	14,071	5,828	258	66564	17173512	16,062	6,366
199	39601	7880599	14,107	5,838	259	67081	17373979	16,093	6,374
200	40000	8000000	14,142	5,848	260	67600	17576000	16,125	6,383
201	40401	8120601	14,177	5,858	261	68121	17779581	16,155	6,391
202	40804	8242408	14,213	5,867	262	68644	17984728	16,186	6,399
203	41209	8365427	14,248	5,877	263	69169	18191447	16,217	6,407
204	41616	8489664	14,283	5,887	264	69696	18399744	16,248	6,415
205	42025	8615125	14,318	5,896	265	70225	18609625	16,279	6,423
206	42436	8741816	14,353	5,906	266	70756	18821096	16,310	6,431
207	42849	8869743	14,387	5,915	267	71289	19034163	16,340	6,439
208	43264	8998912	14,422	5,925	268	71824	19248832	16,371	6,447
209	43681	9129329	14,457	5,934	269	72361	19465109	16,401	6,455

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
270	72900	19683000	16,432	6,463	330	108900	35937000	18,166	6,910
271	73441	19902511	16,462	6,471	331	109561	36264691	18,193	6,917
272	73984	20123648	16,492	6,479	332	110224	36594368	18,221	6,924
273	74529	20346417	16,523	6,487	333	110889	36926037	18,248	6,931
274	75076	20570824	16,553	6,495	334	111556	37259704	18,276	6,938
275	75625	20796875	16,583	6,503	335	112225	37595375	18,303	6,945
276	76176	21024576	16,613	6,511	336	112896	37933056	18,330	6,952
277	76729	21253933	16,643	6,519	337	113569	38272753	18,358	6,959
278	77284	21484952	16,673	6,527	338	114244	38614472	18,385	6,966
279	77841	21717639	16,703	6,534	339	114921	38958219	18,412	6,973
280	78400	21952000	16,733	6,542	340	115600	39304000	18,439	6,980
281	78961	22188041	16,763	6,550	341	116281	39651821	18,466	6,986
282	79524	22425768	16,793	6,558	342	116964	40001688	18,493	6,993
283	80089	22665187	16,823	6,565	343	117649	40353607	18,520	7,000
284	80656	22906304	16,852	6,573	344	118336	40707584	18,547	7,007
285	81225	23149125	16,882	6,581	345	119025	41063625	18,574	7,014
286	81796	23393656	16,912	6,589	346	119716	41421736	18,601	7,020
287	82369	23639903	16,941	6,596	347	120409	41781923	18,628	7,027
288	82944	23887872	16,971	6,604	348	121104	42144192	18,655	7,034
289	83521	24137569	17,000	6,611	349	121801	42508549	18,682	7,041
290	84100	24389000	17,029	6,619	350	122500	42875000	18,708	7,047
291	84681	24642171	17,059	6,627	351	123201	43243551	18,735	7,054
292	85264	24897088	17,088	6,634	352	123904	43614208	18,762	7,061
293	85849	25153757	17,117	6,642	353	124609	43986977	18,788	7,067
294	86436	25412184	17,146	6,649	354	125316	44361864	18,815	7,074
295	87025	25672375	17,176	6,657	355	126025	44738875	18,841	7,081
296	87616	25934336	17,205	6,664	356	126736	45118016	18,868	7,087
297	88209	26198073	17,234	6,672	357	127449	45499293	18,894	7,094
298	88804	26463592	17,263	6,679	358	128164	45882712	18,921	7,101
299	89401	26730899	17,292	6,687	359	128881	46268279	18,947	7,107
300	90000	27000000	17,321	6,694	360	129600	46656000	18,974	7,114
301	90601	27270901	17,349	6,702	361	130321	47045881	19,000	7,120
302	91204	27543608	17,378	6,709	362	131044	47437928	19,026	7,127
303	91809	27818127	17,407	6,717	363	131769	47832147	19,053	7,133
304	92416	28094464	17,436	6,724	364	132496	48228544	19,079	7,140
305	93025	28372625	17,464	6,731	365	133225	48627125	19,105	7,147
306	93636	28652616	17,493	6,739	366	133956	49027896	19,131	7,153
307	94249	28934443	17,521	6,746	367	134689	49430863	19,157	7,160
308	94864	29218112	17,550	6,753	368	135424	49836032	19,183	7,166
309	95481	29503629	17,578	6,761	369	136161	50243409	19,209	7,173
310	96100	29791000	17,607	6,768	370	136900	50653000	19,235	7,179
311	96721	30080231	17,635	6,775	371	137641	51064811	19,261	7,186
312	97344	30371328	17,664	6,782	372	138384	51478848	19,287	7,192
313	97969	30664297	17,692	6,790	373	139129	51895117	19,313	7,198
314	98596	30959144	17,720	6,797	374	139876	52313624	19,339	7,205
315	99225	31255875	17,748	6,804	375	140625	52734375	19,365	7,211
316	99856	31554496	17,776	6,811	376	141376	53157376	19,391	7,218
317	100489	31855013	17,804	6,818	377	142129	53582633	19,416	7,224
318	101124	32157432	17,833	6,826	378	142884	54010152	19,442	7,230
319	101761	32461759	17,861	6,833	379	143641	54439939	19,468	7,237
320	102400	32768000	17,889	6,840	380	144400	54872000	19,494	7,243
321	103041	33076161	17,916	6,847	381	145161	55306341	19,519	7,250
322	103684	33386248	17,944	6,854	382	145924	55742968	19,545	7,256
323	104329	33698267	17,972	6,861	383	146689	56181887	19,570	7,262
324	104976	34012224	18,000	6,868	384	147456	56623104	19,596	7,268
325	105625	34328125	18,028	6,875	385	148225	57066625	19,621	7,275
326	106276	34645976	18,055	6,882	386	148996	57512456	19,647	7,281
327	106929	34965783	18,083	6,889	387	149769	57960603	19,672	7,287
328	107584	35287552	18,111	6,896	388	150544	58411072	19,698	7,294
329	108241	35611289	18,138	6,903	389	151321	58863869	19,723	7,300

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
390	152100	59319000	19,748	7,306	450	202500	91125000	21,213	7,663
391	152881	59776471	19,774	7,312	451	203401	91733851	21,237	7,669
392	153664	60236288	19,799	7,319	452	204304	92345408	21,260	7,674
393	154449	60698457	19,824	7,325	453	205209	92959677	21,284	7,680
394	155236	61162984	19,849	7,331	454	206116	93576664	21,307	7,686
395	156025	61629875	19,875	7,337	455	207025	94196375	21,331	7,691
396	156816	62099136	19,900	7,343	456	207936	94818816	21,354	7,697
397	157609	62570773	19,925	7,350	457	208849	95443993	21,378	7,703
398	158404	63044792	19,950	7,356	458	209764	96071912	21,401	7,708
399	159201	63521199	19,975	7,362	459	210681	96702579	21,424	7,714
400	160000	64000000	20,000	7,368	460	211600	97336000	21,448	7,719
401	160801	64481201	20,025	7,374	461	212521	97972181	21,471	7,725
402	161604	64964808	20,050	7,380	462	213444	98611128	21,494	7,731
403	162409	65450827	20,075	7,386	463	214369	99252847	21,517	7,736
404	163216	65939264	20,100	7,393	464	215296	99897344	21,541	7,742
405	164025	66430125	20,125	7,399	465	216225	100544625	21,564	7,747
406	164836	66923416	20,149	7,405	466	217156	101194696	21,587	7,753
407	165649	67419143	20,174	7,411	467	218089	101847563	21,610	7,758
408	166464	67917312	20,199	7,417	468	219024	102503232	21,633	7,764
409	167281	68417929	20,224	7,423	469	219961	103161709	21,656	7,769
410	168100	68921000	20,248	7,429	470	220900	103823000	21,679	7,775
411	168921	69426531	20,273	7,435	471	221841	104487111	21,703	7,780
412	169744	69934528	20,298	7,441	472	222784	105154048	21,726	7,786
413	170569	70444997	20,322	7,447	473	223729	105823817	21,749	7,791
414	171396	70957944	20,347	7,453	474	224676	106496424	21,772	7,797
415	172225	71473375	20,372	7,459	475	225625	107171875	21,794	7,802
416	173056	71991296	20,396	7,465	476	226576	107850176	21,817	7,808
417	173889	72511713	20,421	7,471	477	227529	108531333	21,840	7,813
418	174724	73034632	20,445	7,477	478	228484	109215352	21,863	7,819
419	175561	73560059	20,469	7,483	479	229441	109902239	21,886	7,824
420	176400	74088000	20,494	7,489	480	230400	110592000	21,909	7,830
421	177241	74618461	20,518	7,495	481	231361	111284641	21,932	7,835
422	178084	75151448	20,543	7,501	482	232324	111980168	21,954	7,841
423	178929	75686967	20,567	7,507	483	233289	112678587	21,977	7,846
424	179776	76225024	20,591	7,513	484	234256	113379904	22,000	7,851
425	180625	76765625	20,616	7,518	485	235225	114084125	22,023	7,857
426	181476	77308776	20,640	7,524	486	236196	114791256	22,045	7,862
427	182329	77854483	20,664	7,530	487	237169	115501303	22,068	7,868
428	183184	78402752	20,688	7,536	488	238144	116214272	22,091	7,873
429	184041	78953589	20,712	7,542	489	239121	116930169	22,113	7,878
430	184900	79507000	20,736	7,548	490	240100	117649000	22,136	7,884
431	185761	80062991	20,761	7,554	491	241081	118370771	22,159	7,889
432	186624	80621568	20,785	7,560	492	242064	119095488	22,181	7,894
433	187489	81182737	20,809	7,565	493	243049	119823157	22,204	7,900
434	188356	81746504	20,833	7,571	494	244036	120553784	22,226	7,905
435	189225	82312875	20,857	7,577	495	245025	121287375	22,249	7,910
436	190096	82881856	20,881	7,583	496	246016	122023936	22,271	7,916
437	190969	83453453	20,905	7,589	497	247009	122763473	22,293	7,921
438	191844	84027672	20,928	7,594	498	248004	123505992	22,316	7,926
439	192721	84604519	20,952	7,600	499	249001	124251499	22,338	7,932
440	193600	85184000	20,976	7,606	500	250000	125000000	22,361	7,937
441	194481	85766121	21,000	7,612	501	251001	125751501	22,383	7,942
442	195364	86350888	21,024	7,617	502	252004	126506008	22,405	7,948
443	196249	86938307	21,048	7,623	503	253009	127263527	22,428	7,953
444	197136	87528384	21,071	7,629	504	254016	128024064	22,450	7,958
445	198025	88121125	21,095	7,635	505	255025	128787625	22,472	7,963
446	198916	88716536	21,119	7,640	506	256036	129554216	22,494	7,969
447	199809	89314623	21,142	7,646	507	257049	130323843	22,517	7,974
448	200704	89915392	21,166	7,652	508	258064	131096512	22,539	7,979
449	201601	90518849	21,190	7,657	509	259081	131872229	22,561	7,984

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
510	260100	132651000	22,583	7,990	570	324900	185193000	23,875	8,291
511	261121	133432831	22,605	7,995	571	326041	186169411	23,896	8,296
512	262144	134217728	22,627	8,000	572	327184	187149248	23,917	8,301
513	263169	135005697	22,650	8,005	573	328329	188132517	23,937	8,306
514	264196	135796744	22,672	8,010	574	329476	189119224	23,958	8,311
515	265225	136590875	22,694	8,016	575	330625	190109375	23,979	8,316
516	266256	137388096	22,716	8,021	576	331776	191102976	24,000	8,320
517	267289	138188413	22,738	8,026	577	332929	192100033	24,021	8,325
518	268324	138991832	22,760	8,031	578	334084	193100552	24,042	8,330
519	269361	139798359	22,782	8,036	579	335241	194104539	24,062	8,335
520	270400	140608000	22,804	8,041	580	336400	195112000	24,083	8,340
521	271441	141420761	22,825	8,047	581	337561	196122941	24,104	8,344
522	272484	142236648	22,847	8,052	582	338724	197137368	24,125	8,349
523	273529	143055667	22,869	8,057	583	339889	198155287	24,145	8,354
524	274576	143877824	22,891	8,062	584	341056	199176704	24,166	8,359
525	275625	144703125	22,913	8,067	585	342225	200201625	24,187	8,363
526	276676	145531576	22,935	8,072	586	343396	201230056	24,207	8,368
527	277729	146363183	22,956	8,077	587	344569	202262003	24,228	8,373
528	278784	147197952	22,978	8,082	588	345744	203297472	24,249	8,378
529	279841	148035889	23,000	8,088	589	346921	204336469	24,269	8,382
530	280900	148877000	23,022	8,093	590	348100	205379000	24,290	8,387
531	281961	149721291	23,043	8,098	591	349281	206425071	24,310	8,392
532	283024	150568768	23,065	8,103	592	350464	207474688	24,331	8,397
533	284089	151419437	23,087	8,108	593	351649	208527857	24,352	8,401
534	285156	152273304	23,108	8,113	594	352836	209584584	24,372	8,406
535	286225	153130375	23,130	8,118	595	354025	210644875	24,393	8,411
536	287296	153990656	23,152	8,123	596	355216	211708736	24,413	8,416
537	288369	154854153	23,173	8,128	597	356409	212776173	24,434	8,420
538	289444	155720872	23,195	8,133	598	357604	213847192	24,454	8,425
539	290521	156590819	23,216	8,138	599	358801	214921799	24,474	8,430
540	291600	157464000	23,238	8,143	600	360000	216000000	24,495	8,434
541	292681	158340421	23,259	8,148	601	361201	217081801	24,515	8,439
542	293764	159220088	23,281	8,153	602	362404	218167208	24,536	8,444
543	294849	160103007	23,302	8,158	603	363609	219256227	24,556	8,448
544	295936	160989184	23,324	8,163	604	364816	220348864	24,576	8,453
545	297025	161878625	23,345	8,168	605	366025	221445125	24,597	8,458
546	298116	162771336	23,367	8,173	606	367236	222545016	24,617	8,462
547	299209	163667323	23,388	8,178	607	368449	223648543	24,637	8,467
548	300304	164566592	23,409	8,183	608	369664	224755712	24,658	8,472
549	301401	165469149	23,431	8,188	609	370881	225866529	24,678	8,476
550	302500	166375000	23,452	8,193	610	372100	226981000	24,698	8,481
551	303601	167284151	23,473	8,198	611	373321	228099131	24,718	8,486
552	304704	168196608	23,495	8,203	612	374544	229220928	24,739	8,490
553	305809	169112377	23,516	8,208	613	375769	230346397	24,759	8,495
554	306916	170031464	23,537	8,213	614	376996	231475544	24,779	8,499
555	308025	170953875	23,558	8,218	615	378225	232608375	24,799	8,504
556	309136	171879616	23,580	8,223	616	379456	233744896	24,819	8,509
557	310249	172808693	23,601	8,228	617	380689	234885113	24,839	8,513
558	311364	173741112	23,622	8,233	618	381924	236029032	24,860	8,518
559	312481	174676879	23,643	8,238	619	383161	237176659	24,880	8,522
560	313600	175616000	23,664	8,243	620	384400	238328000	24,900	8,527
561	314721	176558481	23,685	8,247	621	385641	239483061	24,920	8,532
562	315844	177504328	23,706	8,252	622	386884	240641848	24,940	8,536
563	316969	178453547	23,728	8,257	623	388129	241804367	24,960	8,541
564	318096	179406144	23,749	8,262	624	389376	242970624	24,980	8,545
565	319225	180362125	23,770	8,267	625	390625	244140625	25,000	8,550
566	320356	181321496	23,791	8,272	626	391876	245314376	25,020	8,554
567	321489	182284263	23,812	8,277	627	393129	246491883	25,040	8,559
568	322624	183250432	23,833	8,282	628	394384	247673152	25,060	8,564
569	323761	184220009	23,854	8,286	629	395641	248858189	25,080	8,568

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
630	396900	250047000	25,100	8,573	690	476100	328509000	26,268	8,837
631	398161	251239591	25,120	8,577	691	477481	329939371	26,287	8,841
632	399424	252435968	25,140	8,582	692	478864	331373888	26,306	8,845
633	400689	253636137	25,160	8,586	693	480249	332812557	26,325	8,849
634	401956	254840104	25,179	8,591	694	481636	334255384	26,344	8,854
635	403225	256047875	25,199	8,595	695	483025	335702375	26,363	8,858
636	404496	257259456	25,219	8,600	696	484416	337153536	26,382	8,862
637	405769	258474853	25,239	8,604	697	485809	338608873	26,401	8,866
638	407044	259694072	25,259	8,609	698	487204	340068392	26,420	8,871
639	408321	260917119	25,278	8,613	699	488601	341532099	26,439	8,875
640	409600	262144000	25,298	8,618	700	490000	343000000	26,458	8,879
641	410881	263374721	25,318	8,622	701	491401	344472101	26,476	8,883
642	412164	264609288	25,338	8,627	702	492804	345948408	26,495	8,887
643	413449	265847707	25,357	8,631	703	494209	347428927	26,514	8,892
644	414736	267089984	25,377	8,636	704	495616	348913664	26,533	8,896
645	416025	268336125	25,397	8,640	705	497025	350402625	26,552	8,900
646	417316	269586136	25,417	8,645	706	498436	351895816	26,571	8,904
647	418609	270840023	25,436	8,649	707	499849	353393243	26,589	8,909
648	419904	272097792	25,456	8,653	708	501264	354894912	26,608	8,913
649	421201	273359449	25,475	8,658	709	502681	356400829	26,627	8,917
650	422500	274625000	25,495	8,662	710	504100	357911000	26,646	8,921
651	423801	275894451	25,515	8,667	711	505521	359425431	26,665	8,925
652	425104	277167808	25,534	8,671	712	506944	360944128	26,683	8,929
653	426409	278445077	25,554	8,676	713	508369	362467097	26,702	8,934
654	427716	279726264	25,573	8,680	714	509796	363994344	26,721	8,938
655	429025	281011375	25,593	8,685	715	511225	365525875	26,739	8,942
656	430336	282300416	25,612	8,689	716	512656	367061696	26,758	8,946
657	431649	283593393	25,632	8,693	717	514089	368601813	26,777	8,950
658	432964	284890312	25,652	8,698	718	515524	370146232	26,796	8,955
659	434281	286191179	25,671	8,702	719	516961	371694959	26,814	8,959
660	435600	287496000	25,690	8,707	720	518400	373248000	26,833	8,963
661	436921	288804781	25,710	8,711	721	519841	374805361	26,851	8,967
662	438244	290117528	25,729	8,715	722	521284	376367048	26,870	8,971
663	439569	291434247	25,749	8,720	723	522729	377933067	26,889	8,975
664	440896	292754944	25,768	8,724	724	524176	379503424	26,907	8,979
665	442225	294079625	25,788	8,729	725	525625	381078125	26,926	8,984
666	443556	295408296	25,807	8,733	726	527076	382657176	26,944	8,988
667	444889	296740963	25,826	8,737	727	528529	384240583	26,963	8,992
668	446224	298077632	25,846	8,742	728	529984	385828352	26,981	8,996
669	447561	299418309	25,865	8,746	729	531441	387420489	27,000	9,000
670	448900	300763000	25,884	8,750	730	532900	389017000	27,019	9,004
671	450241	302111711	25,904	8,755	731	534361	390617891	27,037	9,008
672	451584	303464448	25,923	8,759	732	535824	392223168	27,055	9,012
673	452929	304821217	25,942	8,763	733	537289	393832837	27,074	9,016
674	454276	306182024	25,962	8,768	734	538756	395446904	27,092	9,021
675	455625	307546875	25,981	8,772	735	540225	397065375	27,111	9,025
676	456976	308915776	26,000	8,776	736	541696	398688256	27,129	9,029
677	458329	310288733	26,019	8,781	737	543169	400315553	27,148	9,033
678	459684	311665752	26,038	8,785	738	544644	401947272	27,166	9,037
679	461041	313046839	26,058	8,789	739	546121	403583419	27,185	9,041
680	462400	314432000	26,077	8,794	740	547600	405224000	27,203	9,045
681	463761	315821241	26,096	8,798	741	549081	406869021	27,221	9,049
682	465124	317214568	26,115	8,802	742	550564	408518488	27,240	9,053
683	466489	318611987	26,134	8,807	743	552049	410172407	27,258	9,057
684	467856	320013504	26,153	8,811	744	553536	411830784	27,276	9,061
685	469225	321419125	26,173	8,815	745	555025	413493625	27,295	9,065
686	470596	322828856	26,192	8,819	746	556516	415160936	27,313	9,069
687	471969	324242703	26,211	8,824	747	558009	416832723	27,331	9,073
688	473344	325660672	26,230	8,828	748	559504	418508992	27,350	9,078
689	474721	327082769	26,249	8,832	749	561001	420189749	27,368	9,082

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
750	562500	421875000	27,386	9,086	810	656100	531441000	28,460	9,322
751	564001	423564751	27,404	9,090	811	657721	533411731	28,478	9,326
752	565504	425259008	27,423	9,094	812	659344	535387328	28,496	9,329
753	567009	426957777	27,441	9,098	813	660969	537367797	28,513	9,333
754	568516	428661064	27,459	9,102	814	662596	539353144	28,531	9,337
755	570025	430368875	27,477	9,106	815	664225	541343375	28,548	9,341
756	571536	432081216	27,495	9,110	816	665856	543338496	28,566	9,345
757	573049	433798093	27,514	9,114	817	667489	545338513	28,583	9,348
758	574564	435519512	27,532	9,118	818	669124	547343432	28,601	9,352
759	576081	437245479	27,550	9,122	819	670761	549353259	28,618	9,356
760	577600	438976000	27,568	9,126	820	672400	551368000	28,636	9,360
761	579121	440711081	27,586	9,130	821	674041	553387661	28,653	9,364
762	580644	442450728	27,604	9,134	822	675684	555412248	28,671	9,368
763	582169	444194947	27,622	9,138	823	677329	557441767	28,688	9,371
764	583696	445943744	27,641	9,142	824	678976	559476224	28,705	9,375
765	585225	447697125	27,659	9,146	825	680625	561515625	28,723	9,379
766	586756	449455096	27,677	9,150	826	682276	563559976	28,740	9,383
767	588289	451217663	27,695	9,154	827	683929	565609283	28,758	9,386
768	589824	452984832	27,713	9,158	828	685584	567663552	28,775	9,390
769	591361	454756609	27,731	9,162	829	687241	569722789	28,792	9,394
770	592900	456533000	27,749	9,166	830	688900	571787000	28,810	9,398
771	594441	458314011	27,767	9,170	831	690561	573856191	28,827	9,402
772	595984	460099648	27,785	9,174	832	692224	575930368	28,844	9,405
773	597529	461889917	27,803	9,178	833	693889	578009537	28,862	9,409
774	599076	463684824	27,821	9,182	834	695556	580093704	28,879	9,413
775	600625	465484375	27,839	9,185	835	697225	582182875	28,896	9,417
776	602176	467288576	27,857	9,189	836	698896	584277056	28,914	9,420
777	603729	469097433	27,875	9,193	837	700569	586376253	28,931	9,424
778	605284	470910952	27,893	9,197	838	702244	588480472	28,948	9,428
779	606841	472729139	27,911	9,201	839	703921	590589719	28,965	9,432
780	608400	474552000	27,928	9,205	840	705600	592704000	28,983	9,435
781	609961	476379541	27,946	9,209	841	707281	594823321	29,000	9,439
782	611524	478211768	27,964	9,213	842	708964	596947688	29,017	9,443
783	613089	480048687	27,982	9,217	843	710649	599077107	29,034	9,447
784	614656	481890304	28,000	9,221	844	712336	601211584	29,052	9,450
785	616225	483736625	28,018	9,225	845	714025	603351125	29,069	9,454
786	617796	485587656	28,036	9,229	846	715716	605495736	29,086	9,458
787	619369	487443403	28,054	9,233	847	717409	607645423	29,103	9,462
788	620944	489303872	28,071	9,237	848	719104	609800192	29,120	9,465
789	622521	491169069	28,089	9,240	849	720801	611960049	29,138	9,469
790	624100	493039000	28,107	9,244	850	722500	614125000	29,155	9,473
791	625681	494913671	28,125	9,248	851	724201	616295051	29,172	9,476
792	627264	496793088	28,142	9,252	852	725904	618470208	29,189	9,480
793	628849	498677257	28,160	9,256	853	727609	620650477	29,206	9,484
794	630436	500566184	28,178	9,260	854	729316	622835864	29,223	9,488
795	632025	502459875	28,196	9,264	855	731025	625026375	29,240	9,491
796	633616	504358336	28,213	9,268	856	732736	627222016	29,257	9,495
797	635209	506261573	28,231	9,272	857	734449	629422793	29,275	9,499
798	636804	508169592	28,249	9,275	858	736164	631628712	29,292	9,502
799	638401	510082399	28,267	9,279	859	737881	633839779	29,309	9,506
800	640000	512000000	28,284	9,283	860	739600	636056000	29,326	9,510
801	641601	513922401	28,302	9,287	861	741321	638277381	29,343	9,513
802	643204	515849608	28,320	9,291	862	743044	640503928	29,360	9,517
803	644809	517781627	28,337	9,295	863	744769	642735647	29,377	9,521
804	646416	519718464	28,355	9,299	864	746496	644972544	29,394	9,524
805	648025	521660125	28,373	9,302	865	748225	647214625	29,411	9,528
806	649636	523606616	28,390	9,306	866	749956	649461896	29,428	9,532
807	651249	525557943	28,408	9,310	867	751689	651714363	29,445	9,535
808	652864	527514112	28,425	9,314	868	753424	653972032	29,462	9,539
809	654481	529475129	28,443	9,318	869	755161	656234909	29,479	9,543

